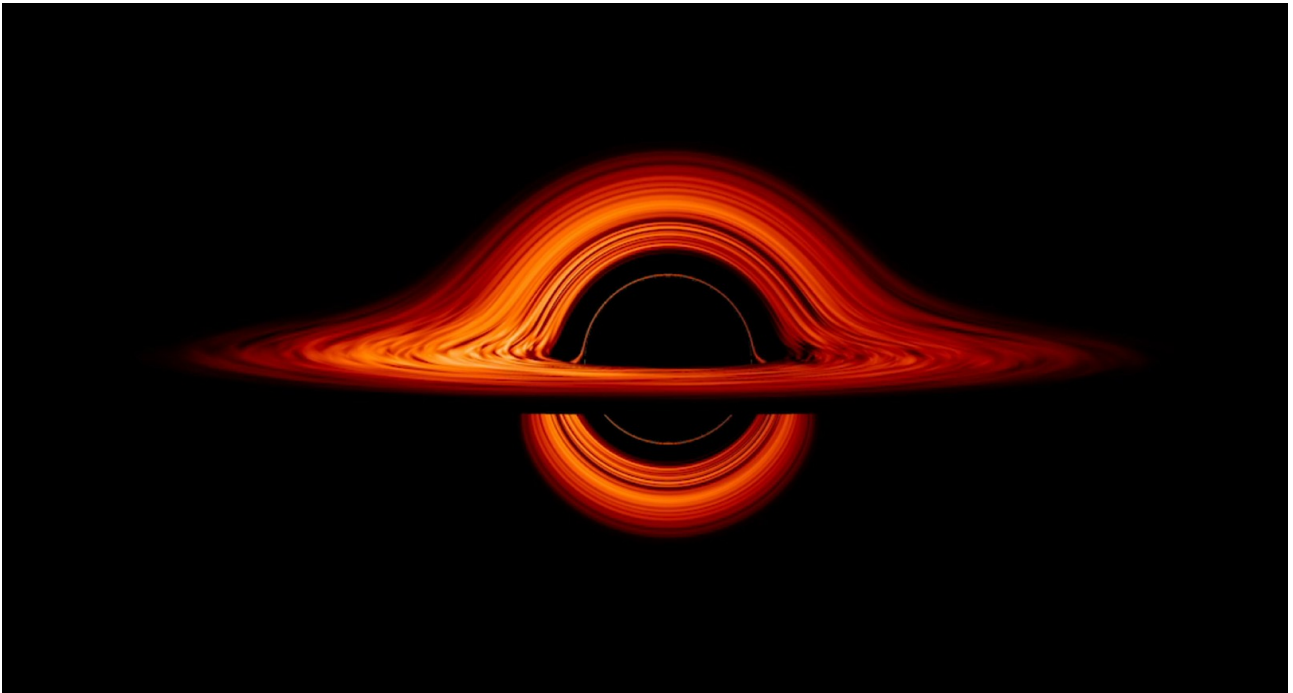


Sorte huller



Figur 1: En model af en tilvækstskive omkring et sort hul. Kilde: NASA/Goddard Space Flight Center/Jeremy Schnittman.

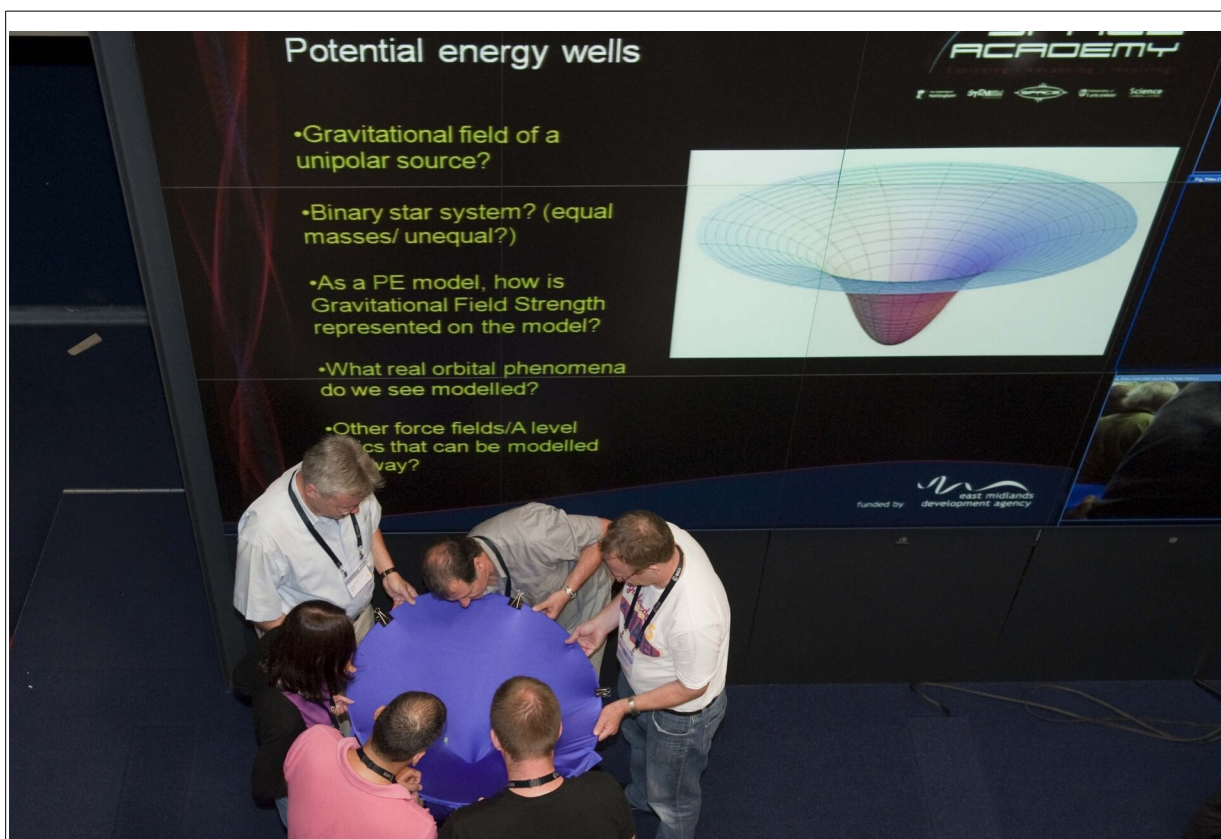
Indholdsfortegnelse

1	Simpel beskrivelse af et sort hul.....	3
1.1	Schwarzschildradius.....	3
1.2	Øvelse – beregning af schwarzschildradius.....	4
1.3	Øvelse – eftervisning af formel.....	4
2	Fotoners vej omkring et sort hul.....	4
2.1	Spil.....	5
3	Dannelse og fordampning af sorte huller.....	6
3.1	Dannelse af sorte huller.....	6
3.2	Øvelse - Massen af det sorte hul i M87.....	7
3.3	Fordampning af sorte huller.....	7
3.3.1	Eksempel – Sort hul med en masse på 10 solmasser.....	9
3.3.2	Eksempel – partikelbeskydning på CERN.....	9
3.3.3	Eksempel – fordampning og baggrundsstrålingen.....	9
3.3.4	Opgave - Et lille sort hul.....	10
4	Fotoners bevægelse om sorte huller.....	10
4.1	Polære koordiatere.....	10
4.2	Geodæter og metrikker.....	11
4.3	Schwarzschildmetrikken.....	12
4.4	Einsteins feltligninger.....	13
4.5	Fotoners bevægelse om det sorte hul.....	13
4.5.1	Løsning af ligningerne.....	14
4.6	Programmeringsopgaven.....	15
4.6.1	Begyndelsesbetingelser.....	15
4.6.2	Programmeringen.....	16
4.7	Fotonradius.....	17
5	Sammenfatning.....	17
6	Referencer.....	17

1 Simpel beskrivelse af et sort hul

Et sort hul er defineret som et område, hvor hverken lys eller stof kan undslippe. Vi kender gravitationen fra den klassiske fysik, og læseren kan forestille sig hvor svært det er at undslippe Jordens tyngdefelt. For at det kan lade sig gøre, kræves der kraftige raketter. Men klassisk set burde lys være upåvirket af gravitationen.

I verdensrummet er det mere korrekt at benytte den generelle relativitetsteori, og ved brug af den ser man, at selv masseløse partikler som lys udsættes for gravitation. Gravitationen er i relativitetsteorien udtrykt ved en deformation af selve *rumtiden*, som beskrives af de 3 rumlige koordinater og en 4. koordinat, der er proportional med tiden. Dvs. rumtiden kan skrives med 4 koordinater (x, y, z, ct), hvor c er lysets hastighed i vakuum. Det er umuligt at forestille sig 4 dimensioner i hovedet, så derfor kan vi illustrere rumtiden ved at gå 1 dimension ned. Betragt figur 2. Her er vist, hvordan en 2-dimensional flade er strukket i den 3. rumlige dimension. Vi har lagt en tung kugle i midten af det elastiske klæde, som så bliver udtrukket. Derefter kan man tage en lille stålkugle og få den til at snurre rundt, mens den ruller nedad mod den tunge kugle. Noget tilsvarende sker med rumtiden i nærheden af tunge legemer, og netop fordi rumtiden er forvrænget, og da lys bevæger sig i rumtiden, vil lyset også udsættes for gravitation.



Figur 2: Noget elastisk stof er udspændt af 6 lærere, og én kaster en kugle, som så snurrer rundt, mens den glider ned i bunden af stoffet. Øverst til højre ses en grafisk fremstilling af gravitationsfeltet. [1]

1.1 Schwarzschildradius

Et sort hul er en punktkilde, dvs. dens radius går mod 0 og dens densitet går mod uendelig. Det viser sig, at hullet har en endelig masse. Der er en mindsteradius større end 0 fra hullet, hvor lys

bliver opslugt, og den kalder vi schwarzschildradius efter Karl Schwarzschild, som først beskrev fænomenet. For at beregne radius korrekt, kræves der indviklet relativitetsteori, men vi kan faktisk godt udlede schwarzschildradius klassisk, hvis vi lukker øjnene et par steder.

To legemer, der er gravitationelt bundne har den mekaniske energi

$$E_{mek} = E_{kin} + E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot V^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Det er samme formel, som vi så i formel 6 i noten *Solsystemet og livsbetingelser*. Hvis legemerne netop er frie, er den mekaniske energi 0, og hvis legemerne er bundne til hinanden, er energien negativ. Vi betragter det koordinatsystem, hvor farten af det sorte hul er $V = 0$. For en bestemt radius $r = R_{sch}$ er energien 0, og det er den radius, vi leder efter, da den angiver den grænse, hvor partikler overgår fra at være frie til bundne. Dvs.

$$0 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R_{sch}} \Leftrightarrow$$

$$R_{sch} = \frac{2 \cdot G \cdot M}{v^2}$$

I tilfældet en foton (altså lys) er hastigheden lyshastigheden, c , og dermed får vi

$$R_{sch} = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2} \quad (1)$$

Dette er den rigtige formel for schwarzschildradius. Problemet med selve regnestykket er, at vi delte med det lille legemes masse i udledningen af formlen, og da en foton's masse er 0, har vi delt med 0. Det må man jo ikke.

1.2 Øvelse – beregning af schwarzschildradius

Find Solens masse, gravitationskonstanten og lysets hastighed i *Formelsamling i astronomi* og vis, at schwarzschildradius for et legeme med Solens masse er 2,95 km.

-0-

I øvelsen ovenfor så vi, at en solmasse giver en schwarzschildradius på 2,95 km. Dermed kan vi omskrive formel 1 til formlen

$$R_{sch} = \frac{M}{M_{sol}} \cdot 2,95 \text{ km} \quad (2)$$

1.3 Øvelse – eftervisning af formel

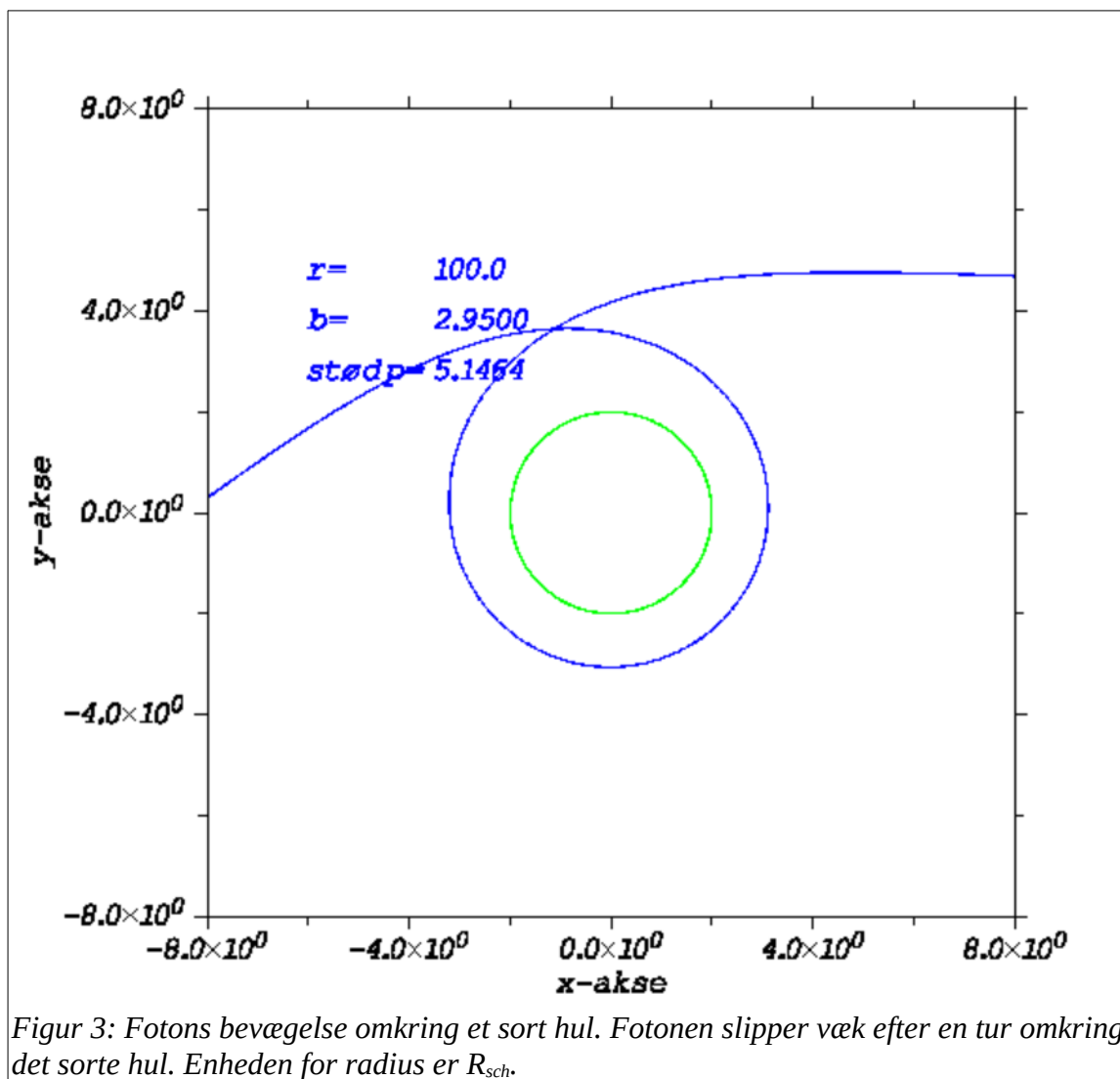
Vis formel 2.

2 Fotoners vej omkring et sort hul

Hvis man vil beregne fotoners vej i nærheden af sorte huller, skal man løse Einsteins feltligninger. Det er en større omgang at udføre, så man kan alternativt downloade et program på astro-gym.dk, der kan tegne banebevægelserne for en. Programmet findes også på astro-serveren, som Rosborg gymnasiums elever kan tilgå. På figur 3 er indtegnet et eksempel på en fotonbane.

På billederne kommer fotonerne langt ude fra højre, og de har vinklerne hhv. $2,95^\circ$ og $3,00^\circ$ målt i forhold til 1. akse. Hvis vinklerne er under $2,95^\circ$ kommer de indenfor schwarzschildradius, som er markeret med de grønne cirkler. Derfra er der ingen vej ud igen.

Her er det måske på sin plads at nævne, at sorte huller virker ved gravitation, og dermed er de ikke anderledes end andre tunge legemer, der tiltrækker stof. I populærpressen fremstilles sorte huller nogle gange som værende aggressive bæster, der opsluger alt på deres vej, men sorte huller opsluger kun lys og stof, hvis man kommer tæt nok på dem eller ens hastighed i forhold til dem er lille. Analogt opsluger Solen og Jorden også stof, hvis det kommer tæt nok på dem.



Figur 3: Fotons bevægelse omkring et sort hul. Fotonen slipper væk efter en tur omkring det sorte hul. Enheden for radius er R_{sch} .

2.1 Spil

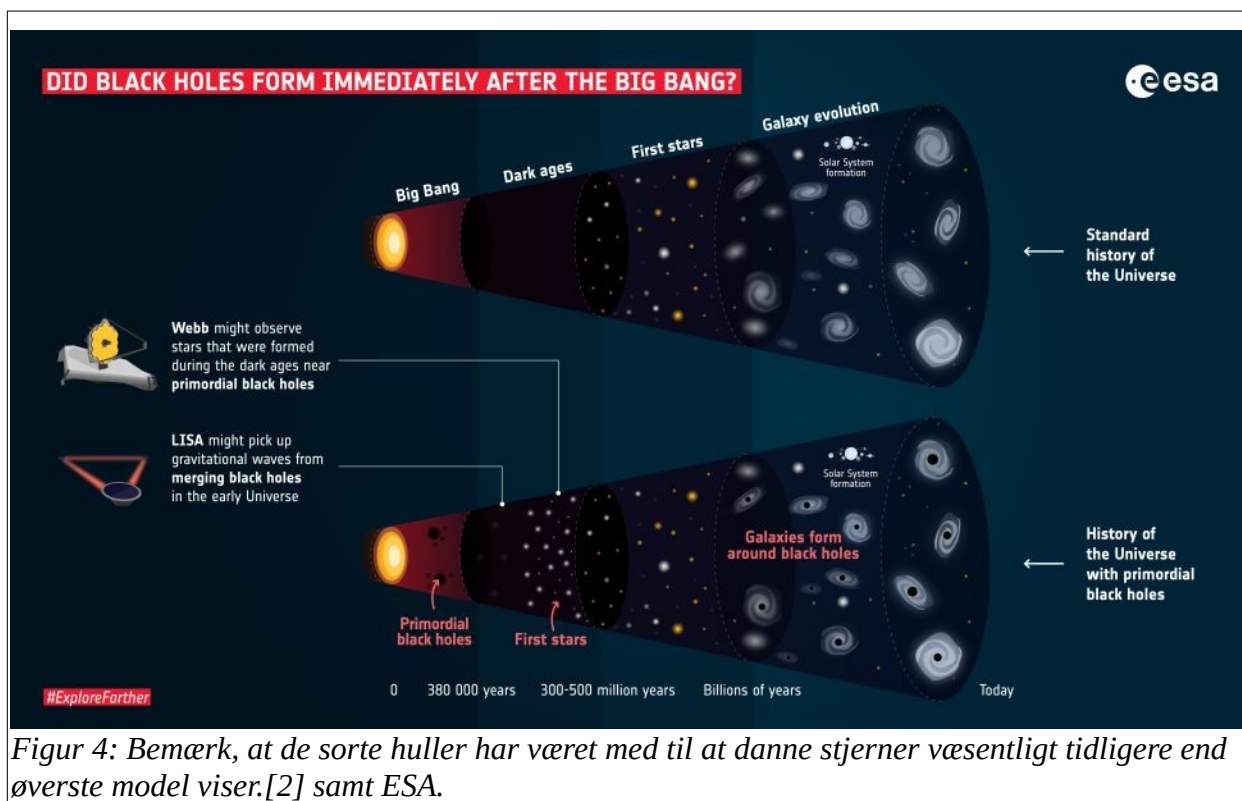
Benyt programmet *Fotontorpedo.tns*, som ligger på astro-serveren til at skyde fotontorpedoer afsted, og benyt det sorte hul til at ramme de to rumskibe. Hvem skal bruge færrest forsøg for at ramme?

-0-

Hvis man er blevet interesseret i, hvordan man beregner fotoners baner, kan man læse afsnit 4, hvor man ledes gennem beregningerne.

3 Dannelse og fordampning af sorte huller

3.1 Dannelse af sorte huller



Sorte huller dannes ved supernovaeeksplosioner af stjerner, der vejer mere end ca. 20-30 solmasser.¹ Selve den brøkdel af en stjernes masse, der skal bruges til at lave det sorte hul, behøver dog ikke veje mere end ca. 3-4 solmasser.

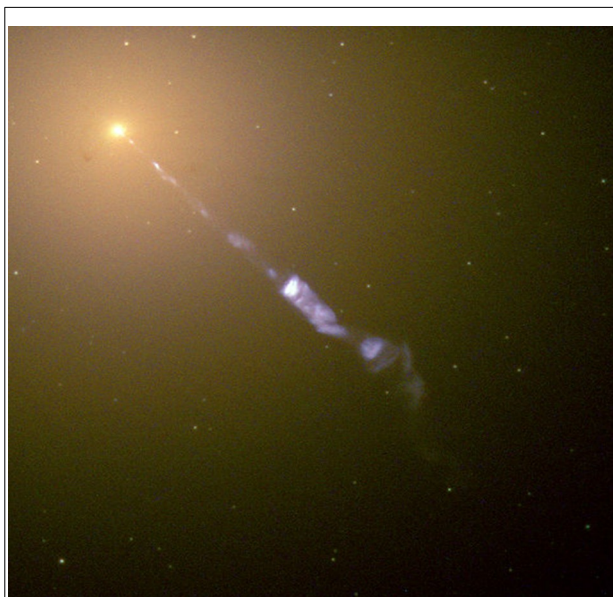
Sorte huller blev sandsynligvis også dannet ved Big Bang. [2] De har dermed været med til at danne galakserne, og det ændrer lidt på den tidslinje, man hidtil har troet gælde for Universets udvikling. Se figur 4.

I dag ved vi, at sorte huller eksisterer, fordi vi har observeret dem. På figur 6 ses et billede af galaksen M87. Man ser, at den udstråler en jet af gas, og det er et indicium på, at der er noget meget tungt i midten af galaksen. Det viste sig, at det er et sort hul, der er årsag til jetten.

¹ Det er svært at give en eksakt grænse, da det ikke kun er massen, der bestemmer, om en døende stjerne ender som neutronstjerne eller sort hul. F.eks. vil et lavere metalindhold i stjerner sænke massegrænsen for dannelsen af et sort hul.



Figur 5: Et optaget billede af det sorte hul i midten af M87. Kilde: Event Horizon Telescope. Det sorte område i midten giver den såkaldte fotonradius. Se opgave 4.7.



Figur 6: Galaksen M87. Kilde: NASA.

Det sorte hul i midten af M87 har en masse på 6,5 mia. solmasser. Det vises i øvelsen nedenfor.

3.2 Øvelse - Massen af det sorte hul i M87

Målinger på figur 5 viser, at schwarzschildradius i midten har en vinkelradius på $7,6 \cdot 10^{-6}$ ". Afstanden til galaksen fra Mælkevejen er målt til 16,4 Mpc.

- Beregn vinkelradius i grader eller radianer.
- Benyt tan-reglen for en retvinklet trekant til at beregne schwarzschildradius i meter.
- Benyt formel (1) eller (2) til at beregne massen af det sorte hul.

-0-

Der findes også et sort hul i midten af Mælkevejen. Dets masse er ca. 4 millioner solmasser. I dag tror vi, at alle galakser har en kerne bestående af et stort sort hul. Muligvis har det sorte hul virket som en form for kondensationskerne, som har tiltrukket stof og stjerner og dermed lavet galakserne.

3.3 Fordampning af sorte huller

Eftersom intet energi/stof kan slippe væk fra de sorte huller, skulle man umiddelbart forvente, at sorte hullers skæbne må være at eksistere i resten af Universets levetid. Sådant en klassisk tankegang er imidlertid ikke rigtig, og kvantemekanikken åbner op for nye muligheder. For eksempel viste Werner Heisenberg, at der på små skalaer, gælder en regel, man kalder *usikkerhedsrelationen*. På formelsprog er usikkerhedsrelationen: $dE \cdot dt > h/(4\pi)$. Læseren har tidligere set den i brug ved fusionsprocesser i stjerners kerner. Se evt. noten *Solen og andre stjerner*.

I ord betyder usikkerhedsrelationen, at en partikels energi er målt med en usikkerhed angivet som dE , og usikkerheden på målingens tidspunkt er angivet som dt . De to usikkerheder ganget sammen overskrider altid værdien, $h/(4\pi) = 5,27 \cdot 10^{-35}$ J·s. Disse usikkerheder er uafhængige af ens udstyr, dvs. man kan ikke mindske dem.

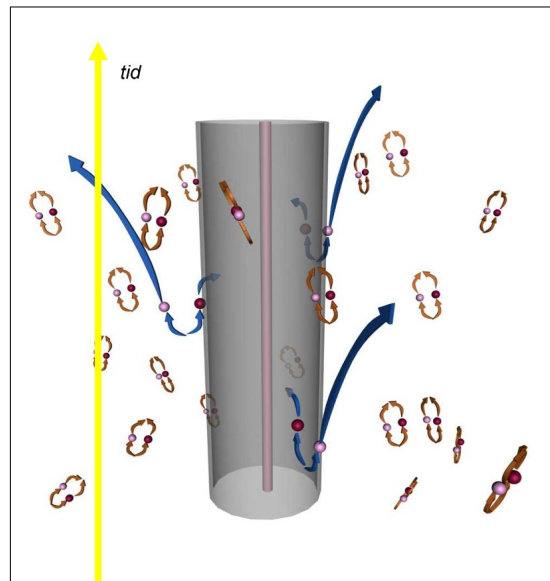
Hvis man betragter et punkt i rummet til et ganske bestemt tidspunkt med dt gående mod nul, vil punktets energi altså have en voksende usikkerhed. Der kan altså kortvarigt være store mængder

energi i punktet! Einsteins formel $E=mc^2$ viser, at energi og masse er ækvivalente størrelser, dvs. der kan dannes partikler af energi i meget korte tidsrum. Disse partikler kaldes for virtuelle partikelpar.

Normalt vil de virtuelle partikelpar forsvinde igen i løbet af tidsrummet dt , men hvis de opstår i nærheden af et sort hul, kan den ene virtuelle partikel smutte ned i det sorte hul og forsvinde, mens den anden slipper væk uden mulighed for at sammensmelte med sin antipartikel igen. Energien til processen kan ikke komme af ingenting, og den bliver taget fra det sorte hul.

De partikler, der slipper væk kan være fotoner eller de kan henfalde til fotoner, og derfor lyser sorte huller som absolutte sorte legemer (planckstråling), og derfor er det muligt for sorte huller at fordampe.

Fænomenet er forsøgt illustreret i figur 7, og figuren fortolkes på følgende måde: Nederst på figuren er indtegnet to cirkler, hvor den inderste cirkel svarer til det sorte hul, og den yderste cirkel svarer til schwarzschildradius. Man burde tegne en kugle, men så bliver det umuligt at tegne tidsaksen på.



Figur 7: Tiden går opad. Man observerer det samme punkt over tid. Partikler dannes og forsvinder igen nærmest øjeblikkeligt. [3]

Når tiden går, tegnes cirklerne igen og igen for nye tidsværdier. Det er derfor de 2 cirkler bliver til 2 cylindre. De små partikler, der er tegnet ind, viser, at partikel-antipartikel-par dannes tilfældigt, og de fleste forsvinder hurtigt igen – undtagen hvis den ene virtuelle partikel krydser schwarzschildradius. Så kan den ikke komme ud og møde sin antipartikel, og den anden partikel flyver så væk.

Stephen Hawking og Jacob Bekenstein har regnet på problemet, og resultaterne kan man se herunder. [5], [6] Temperaturen af et sort legeme med massen M , er givet ved formlen

$$T = \frac{1,230 \cdot 10^{23}}{M} \text{ K} \cdot \text{kg} \quad (3)$$

Vi kan dermed beregne luminositeten af det sorte hul vha. Stefans-Boltzmanns strålingslov:

$$L = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 = 4 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot (1,230 \cdot 10^{23} \text{ K} \cdot \text{kg} \cdot M^{-1})^4 \quad (4)$$

Indsættes udtrykket fra formel (1) for R_{sch} i formel (4) får man:

$$L = 3,597 \cdot 10^{32} \cdot M^{-2} \text{ W} \cdot \text{kg}^2 \quad (5)$$

Eftersom energi og masse er ækvivalente størrelser, kan vi beregne hvor meget masse, der forsvinder som funktion af tiden:

$$E = M \cdot c^2 \Rightarrow \frac{dE}{dt} = E'(t) = M'(t) \cdot c^2 = -L = -3,597 \cdot 10^{32} \text{ W} \cdot \text{kg}^2 \cdot M^{-2} \quad (6)$$

Overvej hvorfor der skal et minus ind i regnestykket ovenfor. Formel (6) er en differentiaalligning, og den kan man løse analytisk. En udregning (som 3. g højniveau-matematikerelever kan efterprøve) viser, at løsningen bliver:

$$M(t) = \left(-1,20 \cdot 10^{16} \frac{\text{kg}^3}{\text{s}} \cdot t + M_0^3 \right)^{\frac{1}{3}} \quad (7)$$

hvor M_0 er det sorte huls masse til dannelsesstidspunktet.

3.3.1 Eksempel – Sort hul med en masse på 10 solmasser

Et sort hul har en masse på 10 solmasser. Levetiden, T_{leve} , for det sorte hul kan bestemmes ud fra formel (7) forudsat, at det sorte hul ikke opsuger masse i løbet af sit levetid. Når det sorte hul er fordampet, er dets masse naturligvis 0, og det giver

$$M(T_{\text{leve}}) = 0 = \left(-1,20 \cdot 10^{16} \frac{\text{kg}^3}{\text{s}} \cdot T_{\text{leve}} + (1,989 \cdot 10^{31} \text{ kg})^3 \right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow T_{\text{leve}} = 6,56 \cdot 10^{77} \text{ s} = 2,08 \cdot 10^{70} \text{ yr}$$

Det sorte hul eksisterer altså i lang tid. (Sammenlign med universets alder på 13,8 Gyr.)

-0-

Som eksemplet ovenfor viser, er der i praksis tale om ganske stabile legemer, men som formel (7) og eksemplet ovenfor også viser, afhænger levetiden af det sorte huls masse i 3. potens. Dvs. hvis man lader startmassen af det sorte hul falde, vil levetiden også falde drastisk. I opgave 3.3.4 regnes på problemet for et sort hul med massen 10^{10} kg. Her vises det, at levetiden er faldet til kun $2,65 \cdot 10^6$ år.

Spørgsmålet er så, om der overhovedet findes så små sorte huller. Inderen Chandrasekhar har vist, at døde stjerner (hvide dværge) med masser på under ca. 1,4 solmasser sagtens kan holde sig selv stabile ved hjælp af en mekanisme, der kaldes degeneret tryk i gasser, så de små sorte huller dannes ikke af stjerner, men en anden teori er, at de er blevet dannet ved et kolossalt tryk i Big Bang.

3.3.2 Eksempel – partikelbeskydning på CERN

Den store accelerator, LHC, ved CERN skyder stråler af ladede partikler ind i hinanden. Hver stråles partikelenergi er på $1,09 \cdot 10^{-6}$ J. Det lyder måske ikke af så meget, men når man tænker på, at partiklerne kan være protoner, så svarer energien til 7250 gange protonens hvilemasse. (Husk at $E=mc^2$.) Det er en voldsom energi. Når sådanne protoner hamrer ind i hinanden, skabes mikroskopiske sorte huller. De er dog så små, at de fordampes med det samme (ca. 10^{-84} s), og derfor er det ikke farligt at lave eksperimenterne. [4]

3.3.3 Eksempel – fordampning og baggrundsstrålingen

I eksempel 3.3.1 så vi på fordampningen af et sort hul, men vi tog ikke hensyn til, at det sorte hul hele tiden modtager energi fra den kosmologiske baggrundsstråling.

Lad os se på det eksempel, hvor et sort hul har en masse, der er så stor, at den netop har en temperatur på 2,7255 K, som er temperaturen af baggrundsstrålingen. Ved indsættelse i formel (3) fås massen

$$M = 1,230 \cdot 10^{23} \frac{\text{K} \cdot \text{kg}}{2,7255 \text{ K}} = 4,51 \cdot 10^{22} \text{ kg} = 2,27 \cdot 10^{-8} M_{\text{sol}}$$

Ovenstående masse er jo ganske lille, og det betyder, at *ingen* sorte huller, der er dannet ved stjerneeksplosioner er begyndt at fordampe endnu, da de modtager mere strålingsenergi, end de udsender.

3.3.4 Opgave - Et lille sort hul

Betragt et lille sort hul, som blev skabt ifm. Big Bang. Det har massen $1 \cdot 10^{10}$ kg. Antag, at det sorte hul ikke modtager stråling fra omgivelserne.

- Beregn det sorte huls levetid.
- Lav en tabel med t , L , og M -værdier.
- Lav en (t, L) -graf, en (t, M) -graf samt en (M, L) -graf.
- Lav en endelig en (M, L) -graf.
- Fortolk de fundne grafer.

-0-

4 Fotoners bevægelse om sorte huller

I dette afsnit vil vi se på nogle resultater fra den generelle relativitetsteori, som kan bruges til at beskrive, hvad der sker, når lys bevæger sig i nærheden af et sort hul. Emnet er ret svært og langt over niveauet for astronomi C-pensum, men det kan bruges som emne til SRP i matematik og astronomi.

4.1 Polære koordinater

Det mest kendte koordinatsystem er det kartesiske, som består af 1-3 dimensioner, og enhedsvektorerne er vinkelrette på hinanden. Et kartesisk koordinatsystem kan ses på figur 8. Akserne er blå, og et tilfældigt punkt P har koordinatsættet (x, y, z) , som er de samme koordinater en vektor har. Den er markeret med en orange pil.

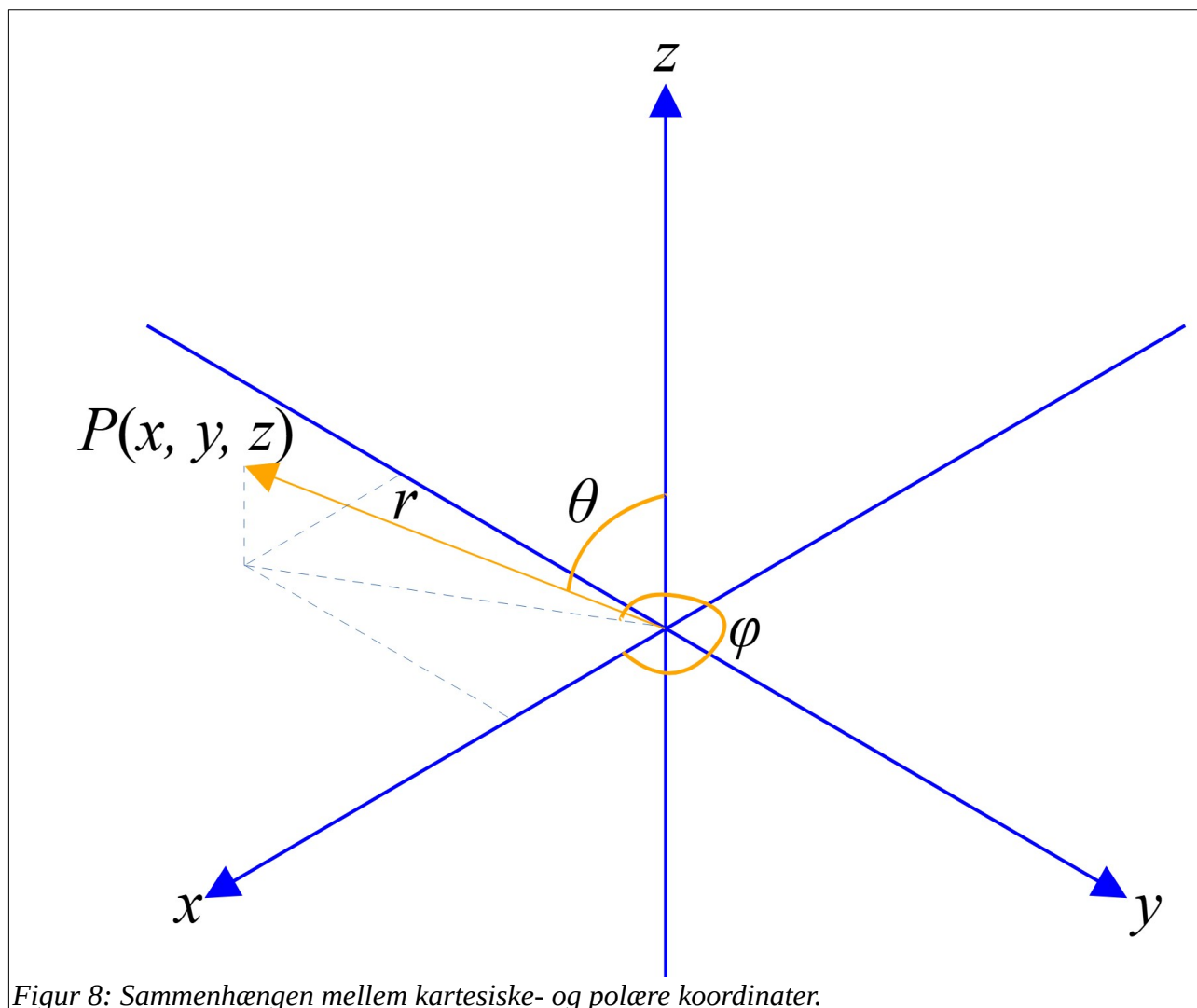
Ofte viser det sig, at matematikken bliver unødigt bøvlet, hvis man bruger et kartesisk system. Det ser man f. eks. i cylinder- eller sfærisk symmetriske problemstillinger, og derfor skifter man ofte koordinatsystem.

Vi antager et sort hul til at være sfærisk symmetrisk, og derfor vil vi bruge det såkaldte *polære koordinatsystem*, som er nyttigt ved sfærisk symmetriske problemstillinger. Man kan se sammenhængen mellem de kartesiske koordinater og de polære koordinater (r, θ, φ) på figur 8.

I matematik kan man vise følgende sammenhæng mellem de to koordinatsæt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Bemærk at visse matematikbøger bytter om på θ og φ !



Figur 8: Sammenhængen mellem kartesiske- og polære koordinater.

4.2 Geodæter og metrikker

En geodæt er defineret som den korteste afstand, ds , mellem to punkter. Lyset vil altid bevæge sig langs geodæter. I et 1-3 dimensionalt kartesisk koordinatsystem er geodæten linjen mellem to punkter.

Vi definerer ved hjælp af Pythagoras' sætning *metrikken* som

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (9)$$

Dvs. hvis vi er i et punkt $P(x, y, z)$, og vi har et nabopunkt $Q(x+dx, y+dy, z+dz)$ vil afstanden $|PQ| = ds$.

Hvis koordinatsystemet ligger på overfladen af en kugle, er den korteste afstand mellem to punkter ikke en linje men derimod et cirkeludsnit. Det ændrer metrikken. Et punkt på en kugleoverfladen er jo netop udtrykt ved de polære koordinater (r, θ, φ) , så man kan differentiere formel (8) og indsætte i formel (9), og det viser sig, at metrikken bliver

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \quad (10)$$

Det er en længere sag at vise (10), men den interesserede matematik A-elev, vil sikkert finde opgaven spændende. Det kan være nyttigt først at sætte sig ind i partiel differentiation samt differentialform, inden man forsøger at vise formelen.

I relativitetsteorien er der som tidligere nævnt 4 dimensioner, nemlig de 3 tidslige + ct . I SI-systemet er $c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s, men i et andet enhedssystem kan man jo vælge hastigheden til 1, for at lette beregninger. Oftest vælger man retningen af vektorerne sådan, at en *rumtidskoordinat* skrives som $(x, y, z, -t)$, hvis $c = 1$. Bemærk at de 4 koordinater er vinkelrette på hinanden – noget vi ikke kan tegne eller forstå i 4 dimensioner, men matematisk set kan man godt lave et koordinatsystem, der har 4 akser, som alle er indbyrdes vinkelrette.

4.3 Schwarzschildmetrikken

På figur 2 er en 2-dimensional analogi til sort hul-problemet vist. Problemet er sfærisk symmetrisk om det tunge legeme, men der er jo ikke længere tale om en kuglesymmetri, som vi så i eksemplet i forrige afsnit. Spandex-stoffet er strukket ud i en aflang form, og den er præciseret øverst på figuren. I virkeligheden er det et 4-dimensionalt problem, der skal regnes på, og det kan man ikke lige tegne.

Karl Schwarzschild har dog regnet på problemet, og det lykkedes ham at finde en metrik for rumtiden omkring et sort hul. Den anfører vi, uden bevis, herunder

$$c^2 \cdot d\tau^2 = B(r) \cdot dt^2 - A(r) \cdot dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot d\phi^2 \quad (11)$$

Bemærk venstresiden i ovenstående formel ift. venstresiden på formel 10, hvor ds var en rumlig afstand. $c d\tau$ er stadigvæk en afstand, mens τ er et tidsmål som kaldes partiklens *egentid*.

Ovenfor er $A(r)$ og $B(r)$ defineret til

$$A(r) = \left(1 - \frac{2 \cdot M \cdot G}{c^2 \cdot r}\right)^{-1} \quad \text{og} \quad B(r) = \left(1 - \frac{2 \cdot M \cdot G}{c^2 \cdot r}\right) \cdot c^2 \quad (12)$$

Hvis vi bruger formel (1), som er udtrykket for schwarzschildradius, kan vi skrive $A(r)$ og $B(r)$ som

$$A(r) = \left(1 - \frac{R_{sch}}{r}\right)^{-1} \quad \text{og} \quad B(r) = \left(1 - \frac{R_{sch}}{r}\right) \cdot c^2 \quad (13)$$

Det er nemt at se, at produktet af $A(r)$ og $B(r)$ giver c^2 .

En måde at fortolke metrikken på er, at det tunge legeme bøjer rumtiden, og det kommer matematisk set til udtryk i formelen for metrikken. I Newtons verden ville det svare til gravitationskraften, som sammen med Newtons 3 love kan bruges til at finde den resulterende kraft på legemet. Når den er kendt, kan man integrere sig frem til bevægelsesligningerne.

4.4 Einsteins feltligninger

I relativitetsteorien skal man bruge Einsteins feltligninger sammen med metrikken, når man vil finde bevægelsesligningerne. Feltligningerne er fæle at regne på, så vi springer over hvor gærdet er lavest og noterer Steven Weinbergs version af ligningerne ned. [7, pp. 185] De er

$$\begin{aligned}
 \text{a) } 0 &= \frac{d^2 r}{dp^2} + \frac{A'(r)}{2 \cdot A(r)} \cdot \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{r}{A(r)} \cdot \left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 - \frac{r \cdot \sin^2(\theta)}{A(r)} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 + \frac{B'(r)}{2 \cdot A(r)} \cdot \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 \\
 \text{b) } 0 &= \frac{d^2 \theta}{dp^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\theta}{dp} \cdot \frac{dr}{dp} - \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\frac{d\varphi}{dp}\right)^2 \\
 \text{c) } 0 &= \frac{d^2 \varphi}{dp^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{dr}{dp} + 2 \cdot \cot(\theta) \cdot \frac{d\varphi}{dp} \cdot \frac{d\theta}{dp} \\
 \text{d) } 0 &= \frac{d^2 t}{dp^2} + \frac{B'(r)}{B(r)} \cdot \frac{dt}{dp} \cdot \frac{dr}{dp}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Ovenfor er p en parameter, der bestemmer linjestykket, og den er proportional med t i metrikken. Weinberg definerer sammenhængen mellem p og t som

$$\frac{dt}{dp} = \frac{c}{B(r)} \tag{15}$$

Endelig viser Weinberg, at følgende sammenhæng gælder mellem partiklens egentid, τ , og den almindelige tid, t , en observatør langt borte måler [7, p. 188]

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{c} \cdot \sqrt{B(r) - \frac{1}{2} \cdot r \cdot B'(r)} \tag{16}$$

For en foton er relationen dog enklere, for der giver differentialkvotienten 0, dvs. formlen ovenfor er kun relevant, hvis man ønsker at regne på en partikel, som har masse.

Ligningerne (14) er 2. ordens differentiaalligninger og de er trælse (umulige?) at løse, så vi indfører nogle ekstra variable, så vi ender med 7 1. ordens- i stedet for 4 2. ordens differentiaalligninger.

De ny variable er defineret som

$$u = \frac{dr}{dp} \text{ og } v = \frac{d\theta}{dp} \text{ og } w = \frac{d\varphi}{dp} \tag{17}$$

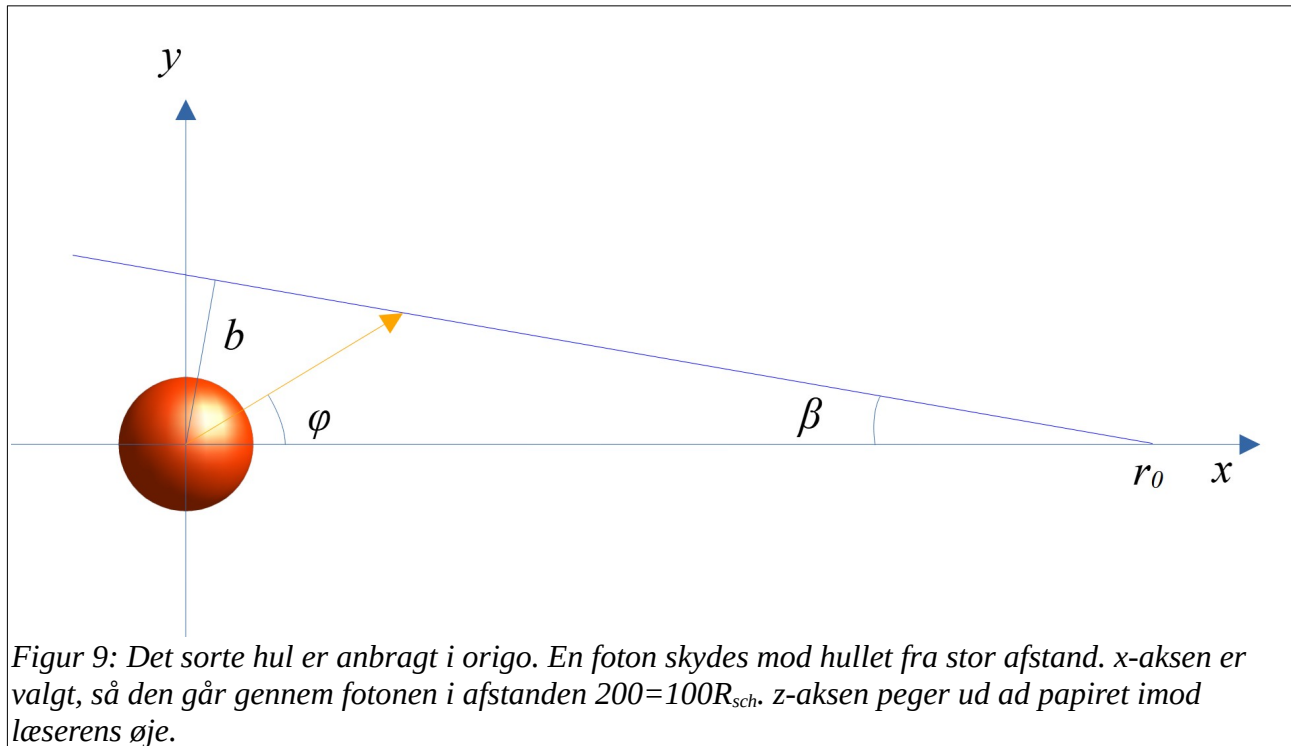
Når vi har set på problemstillingen, vil vi bruge formlerne (11)-(15) til at opstille nogle bevægelsesligninger, som et CAS-værktøj kan løse for os.

4.5 Fotoners bevægelse om det sorte hul

Problemstillingen er vist på figur 9. Man har et sort hul, som er en singularitet, dvs. et punkt. Omkring det sorte hul er der tegnet en kuglesfære, som har schwarzschildradius, R_{sch} . Vi antager for simpeltheds skyld, at det sorte hul ikke er ladet og heller ikke roterer om sig selv.

Størrelsen b i figuren nedenfor kaldes for *stødparameteren*. Fotonen bevæger sig i et plan, dvs. vi kan se på bevægelsen oppefra og det betyder at vinklen $\theta = 90^\circ$ hele tiden. Dermed bliver ligning (14b) automatisk opfyldt.

På figuren kan man se at stødparameteren $b = r_0 \cdot \sin(\beta)$.



4.5.1 Løsning af ligningerne

Vi starter med at dele metrikken (11) med dp^2 . Det giver

$$0 = c^2 \cdot \left(\frac{d\tau}{dp} \right)^2 = B(r) \cdot \left(\frac{dt}{dp} \right)^2 - A(r) \cdot \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 - r^2 \cdot \left(\frac{d\varphi}{dp} \right)^2 \quad (18)$$

Vi substituerer (15) - (17) ind i (18), og det giver

$$\frac{r \cdot w^2}{A} = \frac{1}{r} - \frac{u^2}{r} \quad (19)$$

Nu anvendes ligning (14a) sammen med (15) og (17) og at $\theta = 90^\circ$. Substitution af variable giver følgende ligning

$$\frac{du}{dp} = \frac{r \cdot w^2}{A(r)} - \frac{A'(r)}{2 \cdot A(r)} \cdot u^2 + \frac{B'(r)}{2 \cdot B(r)} \quad (20)$$

Vi kan substituere (19) ind i (20) hvilket giver

$$\frac{du}{dp} = \frac{1}{r} - \frac{u^2}{r} + \frac{B'(r)}{2 \cdot B(r)} \cdot (u^2 - 1) \quad (21)$$

Ovenfor kan man beregne B'/B og indsætte. Det er gjort i formel (23).

I ligning (14c) substitueres udtrykkene fra (17) ind, og man får

$$\frac{dw}{dp} = -\frac{2}{r} \cdot w \cdot u \quad (22)$$

Dvs. vi har nu i alt 5 formler, der skal løses. Formlerne er (17), (21) og (22). Det er ikke nødvendigt at se på formel (14d), da det er formen på banen, vi er interesserede i – ikke tidspunkterne.

4.6 Programmeringsopgaven

De ligninger, der skal løses er sammenfattet nedenfor.

$$\begin{aligned} u &= \frac{dr}{dp} \quad \text{og} \quad w = \frac{d\phi}{dp} \\ \frac{du}{dp} &= \frac{1-u^2}{r} \cdot \left(\frac{r-3}{r-2} \right) \\ \frac{dw}{dp} &= -\frac{2}{r} \cdot w \cdot u \end{aligned} \quad (23)$$

4.6.1 Begyndelsesbetingelser

Vi arbejder ikke i SI-enheder, men i enheder, som kaldes *naturlige*, hvor man kan se definitionen af dem i formel (24).

$$G=1, M=1, c=1 \Rightarrow R_{sch}=2 \quad (24)$$

På figur 9, kan man se at vi har lagt x -aksen i fotonen, som er $r_0 = x_0 = 100R_{sch}$ væk. Derfor må $\phi_0 = 0$. z -aksen var anbragt, så $\theta_0 = \theta = 90^\circ$ hele tiden.

Hvis man differentierer (8) får man hastighedsvektoren, hvis længde naturligvis skal være c , da vi ser på lys. Resultatet af differentiationen bliver

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\phi}^2 \equiv c^2 \quad (25)$$

Ovenfor betyder prikken over symbolerne, at de er differentieret mht. tiden. Vi kan nu bruge (17) til at finde de sidste startparametre. (Formlen gælder kun, når man er langt borte fra det sorte hul.)

$$u = \frac{dr}{dp} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dt}{dp} = \frac{\dot{r} \cdot c}{B(r)} \Leftrightarrow \dot{r} = \frac{B(r) \cdot u}{c}$$

og

$$w = \frac{d\varphi}{dp} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{dp} = \frac{\dot{\varphi} \cdot c}{B(r)} \Leftrightarrow \dot{\varphi} = \frac{B(r) \cdot w}{c}$$
(26)

Udtrykkene fra (26) indsættes i (25), hvilket giver

$$\left(\frac{B \cdot u}{c}\right)^2 + r^2 \cdot \left(\frac{B \cdot w}{c}\right)^2 = c^2$$
(27)

Vi ser altså at startværdierne for u og w afhænger af hinanden. Vi vælger at isolere w , og det giver

$$w_0 = r_0^{-1} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \frac{R}{r_0}\right)^2} - u_0^2}$$
(28)

Nu mangler vi kun at finde en startværdi for u_0 . Vi vælger

$$u_0 = -\cos(\beta)$$
(29)

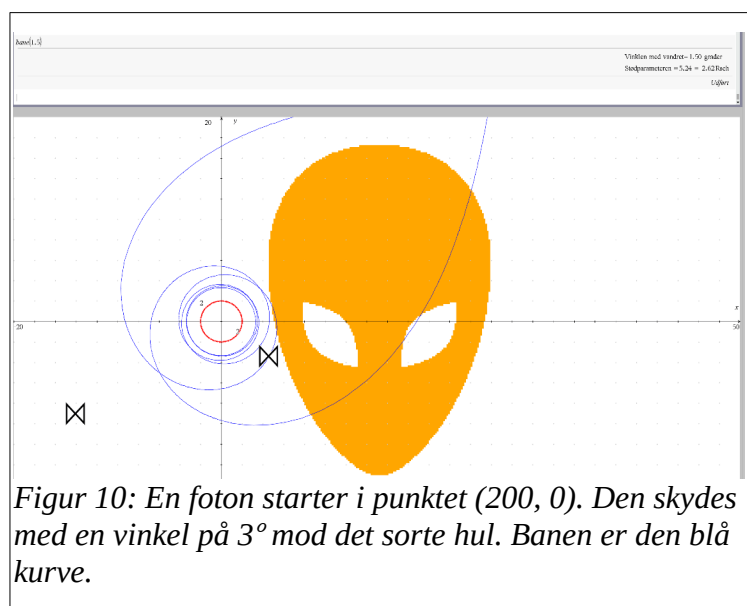
Nu er al det forberedende regnearbejde slut, og læseren føler måske, at det er ret utilfredsstillende, at formlerne (11)-(16) bare er postulerede, men det skyldes, at generel relativitetsteori er ret indviklet, og det kræver flere måneders indføring i teorien, før man kan forstå, hvad der foregår. Begrundelsen for at medtage dette afsnit er, at eleven har mulighed for at se, hvordan teori kan omsættes til en forudsigelse af noget indviklet. Det er også mit håb, at den flittige elev kan udfylde de beregninger, som ikke er medtaget i gennemgangen.

Til sidst mangler vi programmeringen, så man kan få nogle resultater frem.

4.6.2 Programmeringen

Man kan bruge sit favorit CAS-program til at løse ligningerne. I nSpire er der f. eks. en rutine, der hedder $nInt$, der kan bruges til at integrere sig frem. Skabelonen til programmet kan være som følger:

- Spørg brugeren, hvad skudvinklen β skal være.
- Definer alle startbetingelserne, som er fremhævet med fed skrift i afsnit 4.6.
- Skriv en løkke, hvor ligningerne (23) indskrives, og hvor integrationsrutinen bruges på ligningerne.



D) Gem resultaterne i nogle strenge, og de vises på en pæn måde – f. eks. i en graf.

I figur 3 og 10 er eksempler på fremvisning af data i hhv. Fortran/DISLIN og TinSPire.

4.7 Fotonradius

På figur 5 ser man et mørkt centralområde omkranset af lys, der kommer fra tilvækstskiven, som er stof, der spinner ind mod det sorte hul, mens det udsender stråling.

Diameteren af det mørke område er $2R_{\text{foton}}$, og det angiver det område, hvor lys ikke kan bevæge sig i stabile baner om hullet.

- Benyt programmet til at skyde fotoner afsted i en startvinkel på 90° og hvor du varierer r fra 2-5.
- Find den startafstand, hvor banen bliver en cirkel. Den afstand kaldes for fotonradius.
- Beregn fotonradius i enheden schwarzschildradier. ($1 R_{\text{sch}} = 2$ radiusenheder i programmet.)
- Undersøg om fotonen har mulighed for at slippe væk fra det sorte hul ved fotonradius. (Det bør den jo kunne.)

Hvis det sorte hul roterer, får man en anden fotonradius. Så hvis man vil bestemme massen af et sort hul, er det altså nødvendigt at undersøge om hullet roterer eller ej. Der er masser af stof til universitetsstudierne!

-0-

5 Sammenfatning

I denne note har vi set på sorte huller og deres egenskaber. Vi har set, at man sagtens kan regne på flere problemstillinger for sorte huller, men vi har også set, at en grundig og konsistent gennemgang af teorien er ganske omfattende og svær.

Derfor kan eleven glæde sig til de videregående studier, såfremt man vælger et studium, hvor et kursus i generel relativitetsteori indgår.

6 Referencer

- https://www.esa.int/Science_Exploration/Human_and_Robotic_Exploration/Education/Summer_workshop_for_teachers_at_ESTEC
- <https://www.space.com/primordial-black-holes-explain-dark-matter-universe-mysteries>
- <https://francis.naukas.com/2010/09/29/observada-por-primera-vez-la-radiacion-de-hawking-en-un-analogo-optico-de-un-agujero-negro/>
- <http://press.web.cern.ch/backgrounders/safety-lhc>
- <https://www.vttoth.com/CMS/physics-notes/311-hawking-radiation-calculator>
- Michael C. LoPresto, Henry Ford Community College, Dearborn, MI: *Some Simple Black Hole Thermodynamics*. The Physics Teacher, Vol. 41, May 2003. DOI: 10.1119/1.1571268.
- Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley & Sons, 1972.