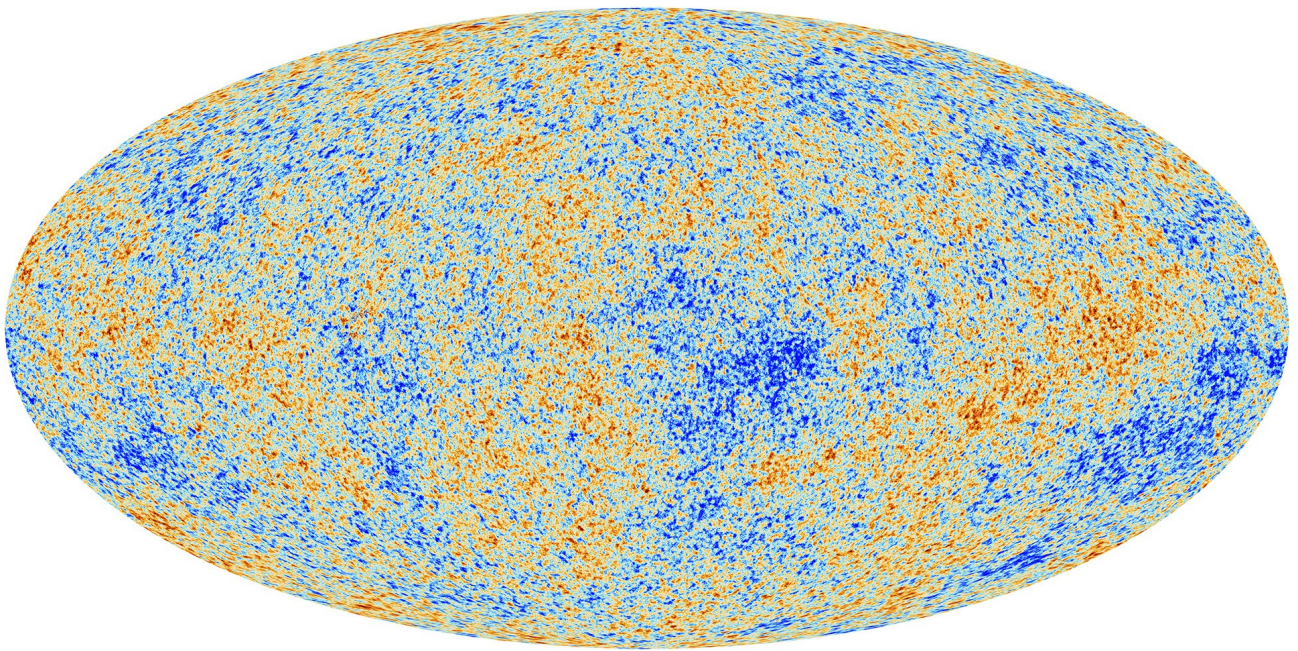


Kosmologi



Planck-teleskopets målinger af den kosmologiske baggrundsstråling. Sådan et billede kan bruges til at måle kosmologiske parametre. Kilde: ESA.

**Af Michael A. D. Møller
Rosborg Gymnasium
December 2017
Redigeret Juni 2026**

Indholdsfortegnelse

1	Observationsmæssig baggrund.....	3
1.1	Grundstofhyppighed i Universet.....	3
1.2	Universets ekspansion.....	3
1.3	Den kosmologiske baggrundsstråling.....	5
1.4	Teoretisk fundament for forståelsen af Universet.....	6
2	Skalafaktoren.....	7
2.1	Hubble-Lemaître-loven.....	7
2.1.1	Opgave - Hubble-Lemaître-loven og NED.....	8
2.1.2	Friedmann-ligningerne.....	10
2.2	Tæthedsparametrene.....	12
2.2.1	De enkelte bidrag til tæthedsparametrene.....	12
2.2.2	Tæthedsparameterens samt K_0 's fortolkning.....	13
2.2.3	Øvelse – Hubblekonstantens enheder.....	14
3	Fortolkninger ved brug af skalafaktoren $R(t)$	14
3.1	Universets alder.....	14
3.2	Den nuværende Hubblekonstant.....	15
3.3	Universets fremtid.....	15
3.4	Kosmologisk rødforskydning.....	16
3.5	Universets temperatur og rekombinationen.....	16
3.5.1	Opgave - Universets alder.....	17
3.6	Dannelsen af de letteste grundstoffer.....	17
3.6.1	Opgave - Tidslinje.....	18
4	Kosmologiske afstande.....	18
4.1.1	Øvelse – baggrunden for rødforskydningsfænomenet.....	19
4.2	Rødforskydning som en dopplerforskydning.....	19
4.2.1	Øvelse.....	20
4.3	Rødforskydning som kosmologisk udvidelse.....	20
4.3.1	Øvelse – Enhedsomregning for lysets hastighed.....	21
4.4	Afstandsberegning.....	21
4.4.1	Eksempel - Kvasaren 3C 273.....	21
4.4.2	Opgave - Post starburst galakser.....	21
4.4.3	Opgave - Gamma Ray Burst GRB 090429B.....	21
4.5	Afstandsberegning uden brug af tiden.....	22
4.5.1	Eksempel - Kvasaren 3C 273 igen.....	23
4.5.2	Opgave (Meget svær) - Partikelhorisonten.....	23
4.6	Analytisk udtryk for udsendelsestidspunktet.....	24
5	Vinkelstyrkespektret.....	25
5.1	Inflation.....	25
6	Konklusion.....	26
7	Referencer.....	27
8	Appendiks 1.....	28
9	Appendiks 2: SRP i matematik og astronomi/fysik.....	29
9.1	Kosmologi og differentialligninger.....	29
9.2	Kosmologi og differentialligninger II.....	30
9.3	Anvendelser af skalafaktoren og Hyperbolske funktioner.....	30

Kosmologi er læren om kosmos, dvs. hele Universet. Kosmologer forsøger at opstille en teori, der forklarer Universets tidsafhængige struktur til alle tider. Med ordet struktur menes fordeling af stof, stråling og andet indhold. (For eksempel den såkaldte mørke energi.) Disciplinen har historisk set været overvejende teoretisk, men i dag har vi en del observationer, der kan bruges til at lave bedre modeller af Universet. Vi vil se på både observationer og teori i denne note.

1 Observationsmæssig baggrund

1.1 Grundstofhyppighed i Universet

Utallige observationer har vist, at stjerner indeholder *omtrent* $X = 75\%$ hydrogen og $Y = 25\%$ helium. Unge stjerner har lidt mindre hydrogen. Til gengæld har de et lidt større indhold af tungere grundstoffer. Hvis man også undersøger galakser, HII-områder (brintskyer) og den kosmiske vind fra Solen, genkender man masseprocenterne ovenfor. Det er kun for planetariske tåger, hvor heliumindholdet er omtrent 40% af massen, at der ses en afvigelse. Her skal man huske på, at planetariske tåger er lavet af døde stjerner, som netop har produceret en del helium, mens de strålede som stjerner, og det kan forklare den større mængde helium. [4] En god kosmologisk teori bør kunne forklare, hvorfor disse masseprocenter findes.

Observation/simulering af:	Heliumindhold (masseprocent)
Solens startmængde ud fra stjernemodeller	22-27
Kosmisk stråling fra Solen	20-26
Kuglehobe og andre gamle stjerner	20-30
Planetariske tåger	40
HII-områder	27
Blå, kompakte galakser	24

[4].



Figur 1: Edwin Hubble. (1931).
Fotograf: Johan Hagemeyer, Camera Portraits Carmel.

1.2 Universets ekspansion

I 1929 udgav Edwin Hubble (og Milton Humason) et arbejde, der viste, at de fleste galakser bevæger sig bort fra Mælkevejen, og at deres hastighed vokser ligefrem proportionalt med deres afstand. Dette resultat kan fortolkes på flere måder:

- Mælkevejen befinder i centrum af Universet, og nærmest alle galakser bevæger sig bort fra denne,
- nærmest alle galakser bevæger sig bort fra hinanden.

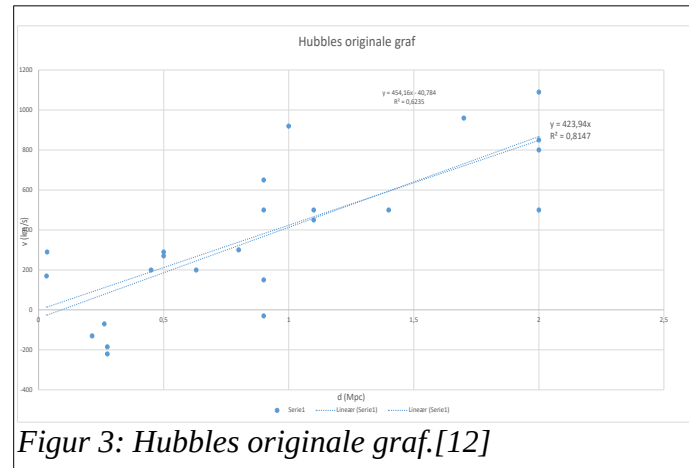
Det faktum, at nogle galakser bevæger sig mod Mælkevejen, kan forklares ved at tage højde for lokal gravitationel tiltrækning. I dag abonnerer alle

astronomer på punkt b ovenfor.



Figur 2: Vesto Slipher. Wikipedia.

2 år forinden havde Georges Lemaître vist, at Universet udvider sig, og at det bør kunne måles på galaksernes bevægelse, så i dette tilfælde kom teorien før målingen. I afsnittet nedenfor om skalafaktoren ser vi, hvordan Lemaître kunne udlede denne lov. I dag kaldes Hubbles lov også for Hubble-Lemaître-loven. [13] Loven er vist på figur 3. Man kan også skrive den som



Figur 3: Hubbles originale graf.[12]

$$v = H_0 \cdot d \quad (1)$$

Ovenfor er v galaksens radialhastighed, d , er galaksens afstand til Mælkevejen og H_0 er Hubble-konstanten. På figur 3, kan man se, at Hubble i første omgang fik en konstant på 424 km/sMpc, men i dag er konstanten målt til 67,7 km/sMpc. Man kan undre sig over denne store ændring, men der er en god forklaring på det, hvis man overvejer, hvordan Hubble kom frem til loven.

Hubble benyttede rødforskydningsmålinger af galakser foretaget af Vesto Slipher samt egne målinger udarbejdet sammen med Milton Humason. Slipher kunne, ved at måle spektrallinjer fra galakserne og ved at sammenligne linjerne med spektrallinjer målt i laboratoriet, bestemme rødforskydningen ved hjælp af formlen

$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\lambda_{\text{målt}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\lambda_{\text{målt}}}{\lambda_{\text{emit}}} - 1 \quad (2)$$

Ved at antage, at rødforskydningen skyldes almindelig dopplerforskydning, gælder der for $z < 0,1$ at $v = z \cdot c$, hvor $c = 2,9979 \cdot 10^5$ km/s er lysets hastighed i vakuum.

Hubble bestemte galaksernes afstand ved at måle på *cepheidestjerner*, som er stjerner, der pulserer i lysstyrke med perioder af størrelsesordenen dage. Det viser sig, at der er en sammenhæng mellem perioden for udsvingene og stjernens absolutte gennemsnitlige luminositet/størrelsesklasse. Så ved at måle perioderne og samtidig deres tilsyneladende luminositeter/størrelsesklasser, kunne han bruge afstandsformlen nedenfor til at bestemme afstandene til cepheiderne.

$$\bar{V} - \bar{M}_V = 5 \cdot \log(d) - 5 + A_V \quad (3)$$

Problemet er bare, at der findes forskellige slags pulserende stjerner, og han blandede *W Virginis-stjerner*, som er population II-stjerner, sammen med cepheidestjerner, som er population I-stjerner. Dengang vidste man dog ikke, at der var forskel på sammenhængen mellem periode og middelluminositet for disse stjernetyper.

Moderne formler for cepheider og W Virginis-stjerner luminositeter er anført nedenfor.

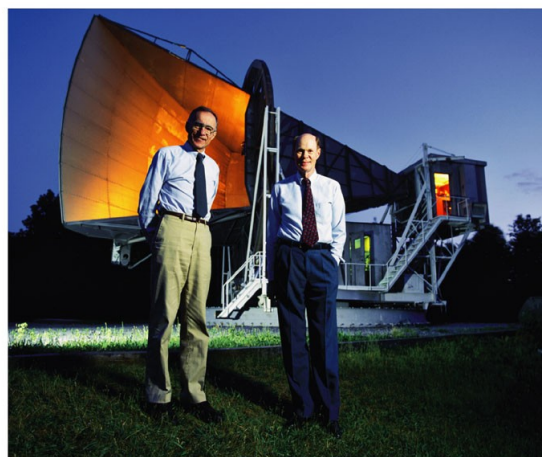
$$\text{Cepheider: } \overline{M_V} = -2,78 \cdot \log(P(d)) - 1,35. \quad (4)$$

$$\text{W Virginis-stjerner: } \overline{M_V} = -2,78 \cdot \log(P(d)) + 0,1 \quad (5)$$

Bemærk, at konstanterne giver en forskel på 1,45 i bestemt størrelsesklasse, og dermed bliver forholdet mellem afstandene bestemt med hhv. formel (4) og (5) næsten en faktor 2! Det er blandt andet derfor, Hubble-konstanten i første omgang blev bestemt så dårligt.

1.3 Den kosmologiske baggrundsstråling

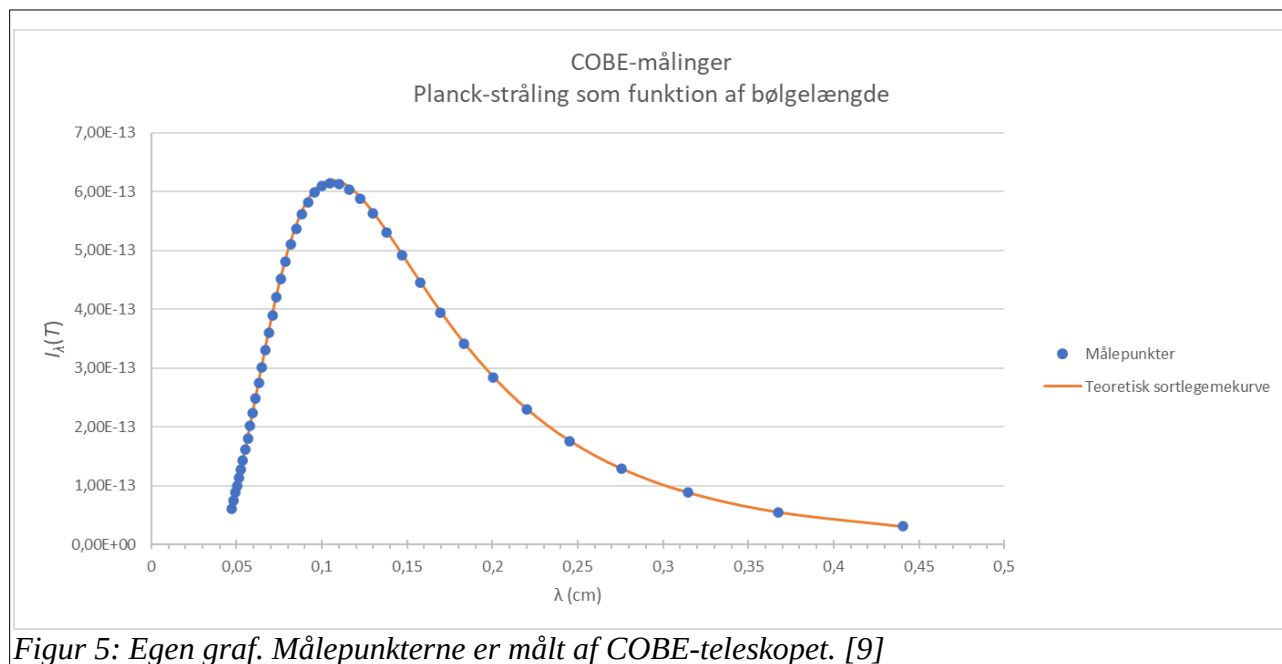
I 1963 observerede Penzias og Wilson første gang, at Universet udstråler en ensartet baggrundsstråling fra alle retninger. [11] Senere observationer med rumbaserede teleskoper bekræftede denne observation. COBE-, WMAP- og Planckteleskoperne har målt en ufatteligt ensartet termisk stråling, og på forsidebilledet er et billede fra Planckteleskopet vist. Hvis man måler styrken af strålingen fra forskellige bølgelængder og tegner en graf, får man en planckkurve, som giver en temperatur på $T = 2,7255 \text{ K}$. Temperaturen er bestemt ved at aflæse toppunktet, og indsætte bølgelængden herfra i Wiens forskydningslov.



Figur 4: Penzias og Wilson foran den hornantenne, hvor de for første gang målte den kosmologiske baggrundsstråling. Billedet er taget mange år efter opdagelsen.[10]

$$\lambda_{maks} \cdot T = 0,0029 \text{ K} \cdot \text{m} \quad (6)$$

Ovenstående observationelle resultater, ensartet- og planckfordelt stråling, og med en temperatur på $2,7255 \text{ K}$ er altså noget, som enhver kosmologisk teori *skal* kunne redegøre for. Hvis teorien ikke kan gøre det, må den være forkert.



Figur 5: Egen graf. Målepunkterne er målt af COBE-teleskopet. [9]

1.4 Teoretisk fundament for forståelsen af Universet

Den eneste teori vi har til at forklare Universets opståen og udvikling er Einsteins generelle relativitetsteori. Teorien er ganske kompliceret, og den er derfor udenfor gymnasiets pensum. Derfor vil vi ikke benytte os af denne teori i denne note. Vi vil dog læne os op ad teorien, og det viser sig, at det bliver muligt at nå frem til en model, der faktisk beskriver Universets tidlige udvikling. Det viser sig, at vores beregninger leder hen til konstanter, som bør bestemmes observationelt, og her bruger vi resultaterne fra Planck-teleskopets målinger. Resultaterne herfra blev offentliggjort i 2013. [1]

Hvis man vil regne på Einsteins 10 feltligninger, oplever man, at det er voldsomt svært at finde løsninger til ligningerne. Derfor er det nødvendigt at lave nogle forsimplede antagelser. Ligningerne er i øvrigt ikke kompatible med kvantemekanikken, så selvom nærmest ethvert tænkeligt eksperiment har bekræftet anvendelser af ligningerne, er de åbenbart ikke helt korrekte – hvis kvantemekanikken altså er korrekt. De antagelser, man laver i kosmologien er følgende:

1. Universet er homogent, dvs. Universets masse/energifordeling er jævn fordelt.
2. Universet er isotropt – dvs. Universet ser ens ud i alle retninger, uanset hvilken som helst galakse, man observerer fra.

Vi kalder antagelserne for *Det kosmologiske princip*. Det er meget svært at teste antagelserne, men en grundig analyse af forsidebilledet kan bruges til at vurdere princippet.

Hvis man anvender det kosmologiske princip sammen med feltligningerne, viser det sig, at det bliver muligt at finde løsninger, der beskriver, hvordan Universet udvikler sig over tid. Disse ligninger kalder vi i daglig tale for *Friedman-ligningerne*, og løsningen til dem er en del af *Big bang-teorien*.

Hvordan teorien i nærmere detalje er udviklet, vil vi ikke komme ind på her, men vi kan opridsede nogle af resultaterne. Interesserede kan f.eks. læse mere i reference [2]-[5]. Især Holger Nielsens

bog [5] er anbefalelsesværdig, da den for det første er helt opdateret, og for det andet også indeholder en del historisk information, der giver et godt indblik i kosmologiens historie.

2 Skalafaktoren

Ligesom man på et atlas over Danmark kan finde en skalafaktor, så har man også på universel skala konstrueret en skalafaktor. Fra geografien kender læseren sikkert, at hvis et kort har skalafaktoren 1:100 000, så betyder det, at 1 cm på kortet svarer til 100 000 cm = 1 km i virkeligheden.

Hubble og Lemaître fandt frem til, at Universet udvider sig, så skalafaktoren for Universet er ikke konstant; den er en funktion af den kosmologiske tid t . Vi kalder skalafaktoren for $R(t)$. $R(t)$ er altså en *funktion*. Hvis man er i stand til at finde forskriften for $R(t)$, har man altså bestemt, hvordan Universet har set ud til alle tider, så længe man kan finde afstandene til et bestemt tidspunkt.

Nedenfor betyder t_0 'nu,' dvs. Universets nuværende alder. $r_0 = r(t_0)$ betyder afstanden¹ mellem to galakser i dag, og $r(t)$ betyder afstanden mellem de samme to galakser til tidspunktet t . Skalafaktoren er i analogi med atlasets skalafaktor defineret som

$$r(t) = R(t) \cdot r(t_0) = R(t) \cdot r_0 \quad (7)$$

Vi ser, at $R(t_0) = 1$.

Det har vist sig², at nedenstående funktion for skalafaktoren, beskriver observationerne godt.

$$R(t) = 0,4809 \cdot (e^{0,08639 \cdot t} - e^{-0,08639 \cdot t})^{\frac{2}{3}} \quad (8)$$

Ovenfor er det underforstået, at enheden på konstanten i leddet ved t er Gyr^{-1} . Bemærk at $R(0) = 0$, dvs. Universet ifølge modellen engang har været samlet i ét punkt. Med andre ord – HELE verden har ligget i et punkt, der er mindre end et atom i størrelse! Dette resultat vil mange mennesker sikkert ikke acceptere som meningsfuldt, og der arbejdes da også på alternative teorier, hvor $R(0) > 0$. Senere skal vi se, at Universets temperatur går mod uendelig for tiden gående mod 0, og uendeligheder betyder normalt, at teorien bryder sammen. Vi kan altså ikke sige noget fornuftigt om $t = 0$.

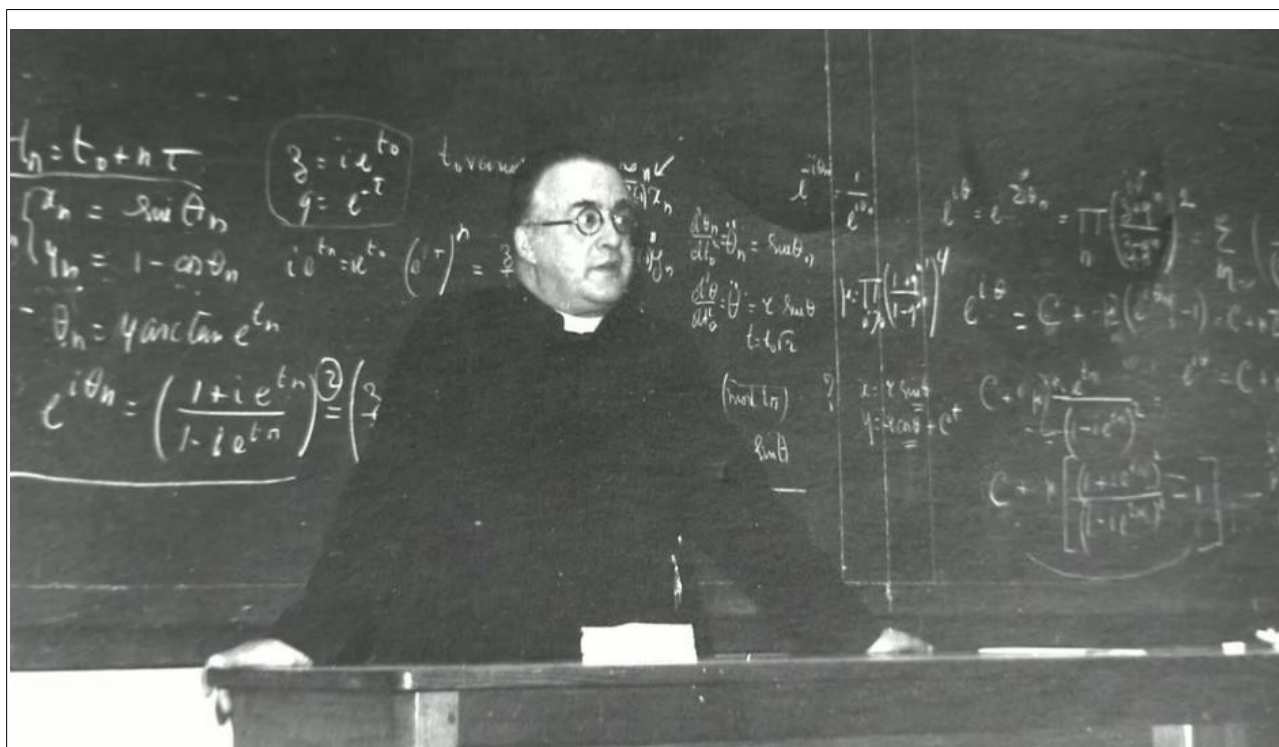
2.1 Hubble-Lemaître-loven

I formel (1) er Hubble-Lemaître-loven anført. Den var observationelt bestemt. Herunder ser vi, hvordan Georges Lemaître udledte loven teoretisk. Georges Lemaître var en belgisk fysiker og præst, hvilket forklarer formen af hans krave. Man kan læse mere om ham i kilde [14].

Nedenstående beregninger kræver, at læseren ved, hvordan man differentierer en funktion. Hvis man ikke kan det, er det nødvendigt at acceptere formel (9) uden videre.

¹ r_0 kaldes i litteraturen for *comoving distance* og betegnes nogle gange med bogstavet χ . $r(t)$ kaldes for *proper distance*.

² $R(t)$ er justeret til at passe med Planck-satellittens resultater, dvs. $H_0 = 67,74 \text{ km}/(\text{sMpc})$ og $t_0 = 13,799 \text{ Gyr}$. [5]



Figur 6: Georges Lemaître ved en forelæsning. ESA

Differentiation af formel (7) for skalafaktoren og substitution af r_0 ved hjælp af samme formel giver

$$r'(t) = R'(t) \cdot r_0 \Leftrightarrow r'(t) = \frac{R'(t)}{R(t)} \cdot r(t).$$

Ovenfor er $r(t)$ afstanden til en fjerntliggende galakse, og $r'(t)$ er dermed dens hastighed i forhold til Mælkevejen. Dvs. definitionen af skalafaktoren leder direkte til Hubble-Lemaître-loven

$$v(t) = \frac{R'(t)}{R(t)} \cdot r(t) \equiv H(t) \cdot r(t). \quad (9)$$

Teorien forudsiger altså Hubbles observationelt bestemte lov. Vi ser også, at hubblekonstanten faktisk er en parameter, der afhænger af tiden. De relevante tidsrum måles i milliarder af år, så det er en udmærket talemåde at kalde $H(t)$ for en konstant.

Vi ser også, at $H_0 \equiv H(t_0) = R'(t_0)$, eftersom $R(t_0) = 1$. Dvs. vi har nu en målbar parameter, H_0 , der kan bruges til at kontrollere vores modelskalafaktor.

Vi har i formel (8) postuleret løsningen for $R(t)$. Den er udledt ved hjælp af generel relativitetsteori, men man kan godt udlede den ved hjælp af newtonsk mekanik tilsat lidt ekstra størrelser. En udledning er vist i boksen nedenfor. På trods af tilnærmelsen til klassisk fysik, er boksen alligevel regnetung, så hold tungen lige i munden, hvis du ønsker at læse den.

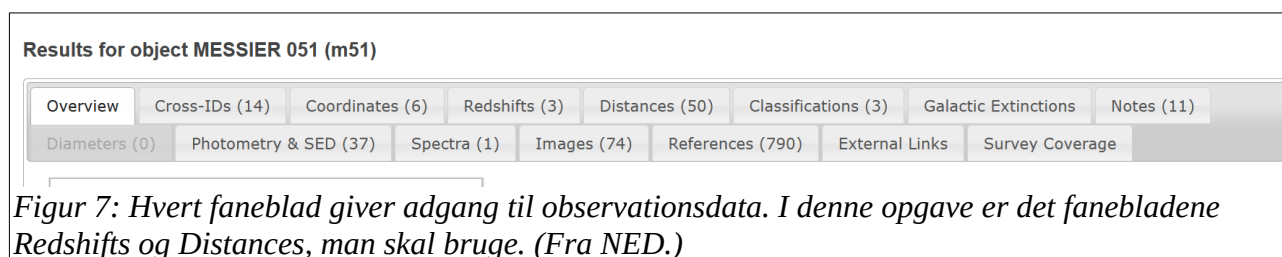
2.1.1 Opgave - Hubble-Lemaître-loven og NED

I denne opgave skal du kontrollere Hubble-Lemaître-loven (9) ved at anvende selvvalgte observationsdata fra databasen Nasa/Ipac Extragalactic Database, NED.

Du skal bruge data fra ca. 10 galakser, som er længere væk end den lokale gruppe.

- Forklar hvorfor de valgte galakser ikke må ligge i den lokale gruppe.
- Vælg nogle galakser. Du kan f. eks. bruge nogle af de galakser, der er listet i Messier-kataloget. En version af det katalog findes her: https://da.wikipedia.org/wiki/Messiers_katalog Du kan også søge på NGC-objekter, som er noget længere væk end Messier-objekterne.
- Besøg NED på adressen: <https://ned.ipac.caltech.edu/> Prøv f. eks. at søge på M51.

Databasens resultater er opdelt under en masse overskrifter, som vist på billedet herunder.



- Noter den galaktocentriske hastighed for galakserne samt deres afstandsmodul, $m-M$. Bemærk at der er mange målinger af afstandsmodulet. Du kan vælge en tilfældig, eller tage et gennemsnit af et udvalg.
- Beregn afstanden til galakserne ved at bruge formlen $m-M=5 \cdot \log(d)-5$. Kontroller om dine beregnede afstande passer med databasens.
- Tegn en (d, v) -graf og bestem den bedste forskrift for grafen.
- Fortolk grafen ved hjælp af formel (1).

2.1.2 Friedmann-ligningerne

Nedenstående tekst er stærkt inspireret af Kurt Jakobsens bog *Universer og Universet*. [3]

I et *homogent* univers findes en galaksedensitet, $\varrho(t)$, som er ensartet overalt til et givet tidspunkt, dvs. man skal se på afstandsskalaer større end ca. 400 Mpc [8], for at galaksedensiteten giver mening. En galakse i afstanden r fra os, vil opleve en gravitationskraft, F , fra massen, $M(r)$, i den kugle, der har os i centrum. (Newtons 2. teorem.) Man får

$$F_G = \frac{-G \cdot M(r) \cdot m}{r^2} = \frac{-G \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \varrho(t) \cdot m}{3 \cdot r^2} = -\frac{4}{3} \cdot m \cdot \pi \cdot G \cdot r \cdot \varrho(t).$$

Hvis man inkluderer Einsteins forslag til en frastødende kraft $F_\Lambda = \frac{m}{3} \cdot \Lambda \cdot r$, udvides formelen ovenfor til $F = -\frac{4}{3} \cdot m \cdot \pi \cdot G \cdot r \cdot \varrho + \frac{m}{3} \cdot \Lambda \cdot r$. Einsteins kraft vokser altså med afstanden, så den er helt forskellig fra gravitationskraften. I dag fortolkes Λ som en energitæthed, der er konstant, men det er en mystisk form for energi, for den frastøder i stedet for at tiltrække. Vi kalder den for *mørk energi*.

Vi benytter nu Newtons 2. lov med ovenstående kraft som den resulterende kraft, F_{res} , og vi får

$$m \cdot r''(t) = -\frac{4}{3} \cdot m \cdot \pi \cdot G \cdot r(t) \cdot \varrho(t) + \frac{m}{3} \cdot \Lambda \cdot r(t).$$

Definitionen af skalafaktoren benyttes, og det giver

$$\begin{aligned} m \cdot r(t_0) \cdot R''(t) &= -\frac{4}{3} \cdot m \cdot \pi \cdot G \cdot r(t_0) \cdot R(t) \cdot \varrho(t) + \frac{m}{3} \cdot \Lambda \cdot r(t_0) \cdot R(t) \Leftrightarrow \\ m \cdot R''(t) &= -\frac{4}{3} \cdot m \cdot \pi \cdot G \cdot R(t) \cdot \varrho(t) + \frac{m}{3} \cdot \Lambda \cdot R(t) \Leftrightarrow \\ R''(t) &= -\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot G \cdot R(t) \cdot \varrho(t) + \frac{\Lambda}{3} \cdot R(t) \end{aligned}$$

Ovenstående ligning er en af *Friedman-ligningerne*, som er opkaldt efter russeren *Alexander Friedman*, som var den første, der opstillede dem.

Vi kan udtrykke densiteten, $\varrho(t)$, som en funktion af den nuværende densitet ϱ_0 og skalafaktoren. Overvej formen $\varrho(t) = \frac{\varrho_0}{R(t)^3}$.

Ved substitution af udtrykket for densiteten får vi en ny Friedmann-ligning

$$R''(t) = -\frac{4 \cdot \pi \cdot \varrho_0 \cdot G}{3 \cdot R(t)^2} + \frac{\Lambda}{3} \cdot R(t). \quad (10)$$

Ligning (10) er en 2. ordens differentialligning, men den kan integreres til en 1. ordens differentialligning. Løsningen bliver

$$R'(t)^2 = \frac{8 \cdot \pi \cdot \varrho_0 \cdot G}{3 \cdot R(t)} + \frac{\Lambda \cdot R(t)^2}{3} - K_0 \cdot c^2. \quad (11)$$

Læseren kan differentiere ovenstående ligning og tjekke, at den er en løsning til (10). Integrationskonstanten har man valgt at udtrykke som $-K_0 \cdot c^2$, hvor c er lysets hastighed. K_0 kaldes for *krumningen*.

De kritiske tætheder er defineret som

$$\varrho_c \equiv \frac{3 \cdot H_0^2}{8 \cdot \pi \cdot G} \text{ og } \varrho_{\text{vakuum}} \equiv \frac{\Lambda}{8 \cdot \pi \cdot G}, \quad (12)$$

som bruges til at definere de 2 enhedsløse størrelser *massetæthedsparmeteren* $\Omega_0 \equiv \frac{\varrho_0}{\varrho_c}$ og *vakuumtæthedsparmeteren* $\Omega_\Lambda \equiv \frac{\varrho_{\text{vakuum}}}{\varrho_c} = \frac{\Lambda}{3 \cdot H_0^2}$. Disse to størrelser samt (12) indsættes i (11), og så får vi endnu en Friedmann-ligning

$$R'(t)^2 = \frac{\Omega_0 \cdot H_0^2}{R(t)} + H_0^2 \cdot R(t)^2 \cdot \Omega_\Lambda - K_0 \cdot c^2. \quad (13)$$

Nogle gange vælger man et enhedssystem, hvor c og H_0 er defineret til 1. Det simplificerer (13), men så skal man jo huske (13), når tal skal regnes omregnes til almindelige enheder.

Hvis man løser (13) for $K_0 = 0$, får man netop (8), som generelt lyder

$$R(t) = a \cdot (e^{b \cdot t} - e^{-b \cdot t})^{2/3}, \text{ hvor } a = \sqrt[3]{\frac{\Omega_M + \Omega_{DM}}{4 \cdot \Omega_\Lambda}} \text{ og } b = \frac{3 \cdot H_0}{2} \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda}. \quad (14)$$

Ovenfor er massetæthedsparmeteren splittet op i et bidrag fra almindeligt stof samt såkaldt *mørkt stof*, som vi kan måle findes i rigelige mængder i universet, men som ikke lyser. Hvis man indsætter H_0 i enheden Gyr^{-1} , så skal $[t] = \text{Gyr}$ i (14).

Hvis læseren ønsker at se mere til beregninger med skalafaktoren, kan man kigge i afsnit 4.4 og 4.5.

2.2 Tæthedsparametrene

I boksen om Friedmann-ligningerne blev tæthedsparametrene defineret. De udtrykker et dimensionsløst mål for densiteter af Universets indhold. Indholdet kan være almindeligt stof og stråling, mørkt stof, og mørk energi. Almindeligt stof og stråling er grundstofferne samt elementarpartikler som f. eks. neutrinoer og elektromagnetisk stråling. Mørkt stof er stof, der kun vekselvirker med andre stoffer via gravitationskraften, og vi har mødt det i forbindelse med fortolkningen af rotationskurver for spiralgalakser. Mørk energi er en mystisk form for energi, som virker frastødende. Normalt er stof og energi ækvivalente, og sammenhængen mellem dem kan udtrykkes ved hjælp af Einsteins ligning

$$E = m \cdot c^2 \quad (15)$$

Ligningen udtrykker, at energi også bør virke tiltrækkende, ligesom stof er. Den mørke energi virker bare modsat. Vi ved pt. ikke hvad mørk energi i realiteten er for noget.

Tæthedsparametrene skrives

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \Omega_{\text{stof}} + \Omega_{\text{mørkt stof}} \equiv \Omega_M + \Omega_{DM} \\ \Omega &= \Omega_0 + \Omega_{\text{mørk energi}} \equiv \Omega_M + \Omega_{DM} + \Omega_\Lambda \end{aligned} \quad (16)$$

2.2.1 De enkelte bidrag til tæthedsparametrene

Det synlige stof – almindeligt stof

Det synlige stof, er det stof, som vi i princippet kan se/måle i vore kikkerter. (Vi ser lyset fra stjerner, enkelte planeter og lysende tåger, og vi kan regne os frem til hvor meget stof, der må være.)

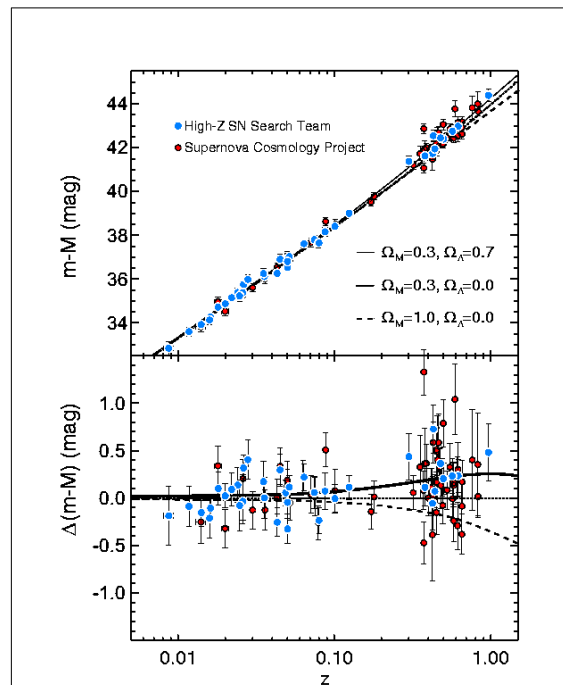
Det mørke stof (egentligt usynligt stof)

Det mørke stof kan vi ikke se, men vi kan f.eks. ved hjælp af analyser af galaksebevægelser i galaksehobe og rotationskurver bestemme tætheden af mørkt stof.

Den mørke energi

Den mørke energi repræsenterer et energibidrag, som virker frastødende i modsætning til normal masse og energi, som jo virker tiltrækkende.

Vi tror, den mørke energi er der, da legemer med meget høj rødforskydning ($z > 0,4$) er 'for langt væk.' Noget må altså have accelereret deres bevægelse. Figur 8 viser de resultater, hvis fortolkning gav anledning til genfremstillingen af ideen om en universel frastødende kraft. Einstein indførte oprindeligt ideen med hans kosmologiske konstant i 1917, men gik bort fra den igen, da han via Edwin Hubble hørte, at Universet udvider sig – oprindeligt havde han indført den frastødende kraft, så man kunne få et statisk univers; altså et univers, der slet ikke udvidede sig.



Figur 8: Afstande til galakser. Afstanden er målt vha. lyskurver fra supernovaer. [15] I nederste graf har man fratrullet model 2 fra målepunkterne.

Fortolkningen af figur 8 er som følger. Først måles de tilsyneladende størrelsesklasser for supernovaer, hvis absolutte størrelsesklasser er kendt. Dernæst bestemmes intergalaktisk absorption og endelig beregnes afstanden til supernovaerne og dermed de galakser, hvori supernovaerne findes ved hjælp af formel (3). Dernæst måles kosmologiske rødforskydninger for de samme galakser. Grafen kan nu tegnes.

Er rødforskydningen lille, kan hastigheden og dermed afstanden bestemmes ved hjælp af formlerne 1 og 2. Er rødforskydningen større end ca. 0,1, skal man benytte skalafaktoren samt formel (21), som vi ser på senere. De sorte linjer på figur 8 viser afstandene for forskellige densitetsparametre, krumning og hubblekonstant. Kun én model får afstandene til at passe med observationerne, og man ser, at det ikke er en ret linje. For store rødforskydningstal er de målte afstande "for store", og det fortolker vi, som om at universet nu har fået mere fart på. I Appendiks 1 kan man se en opdateret kurve.

2.2.2 Tæthedsparameterens samt K_0 's fortolkning

K_0 er et udtryk for Universets krumning eller form, om man vil. Vi kan ikke umiddelbart forstå dette – selv ikke, hvis vi nærstuderer boksen med Friedman-ligningerne. Vi kan dog knytte krumningen og hubblekonstanten sammen ved hjælp af en af Friedman-ligningerne. Vi tager udgangspunkt i formel (13):

$$R'(t)^2 = \frac{\Omega_0 \cdot H_0^2}{R(t)} + H_0^2 \cdot R(t)^2 \cdot \Omega_\Lambda - K_0 \cdot c^2.$$

For $t = t_0$, får vi følgende udtryk

$$R'(t_0)^2 = H_0^2 = \frac{\Omega_0 \cdot H_0^2}{R(t_0)} + H_0^2 \cdot R(t_0)^2 \cdot \Omega_\Lambda - K_0 \cdot c^2 = \Omega_0 \cdot H_0^2 + H_0^2 \cdot \Omega_\Lambda - K_0 \cdot c^2 \Leftrightarrow$$

$$1 = \Omega_0 + \Omega_\Lambda - \frac{K_0 \cdot c^2}{H_0^2} = \Omega - \frac{K_0 \cdot c^2}{H_0^2}. \quad (17)$$

Dvs. hvis vi kan måle 2 af de 3 parametre i formel (17), så kan den sidste størrelse bestemmes.

Det viser sig, at hvis $K_0 \cdot c^2 > 0$ er Universets geometriske form lukket, og omvendt hvis $K_0 \cdot c^2 < 0$. Hvis $K_0 = 0$ er universet fladt, dvs. euklidisk. Det betyder, at den geometri, man lærer i skolen, virker overalt i Universet. (F. eks. at der er 180° i en trekant.)

Dvs. vi kan finde de værdier af den totale tæthedsparameter, hvor Universets struktur ændrer sig:

$K_0 < 0$ medfører, at $\Omega < 1$: Universet har en lav densitet, og det vil udvide sig for evigt. (Universets form er som en 3-dimensional sadelflade i den 4-dimensionale rum-tid.)

$K_0 = 0$ medfører, at $\Omega = 1$: Universets densitet er netop så stor, at det vil udvide sig ud i det uendelige. (Universet er fladt.)

$K_0 > 0$ medfører, at $\Omega > 1$: Universets densitet er så stor, at Universet en gang vil klappe sammen i et Big Crunch. (Universets form er lukket.)

Ovenfor er begrebet *rum-tid* benævnt. Det er navnet for det faktum, at Universet har 4 dimensioner; de tre rumlige samt tiden. Man ganger lysets hastighed på tiden, og så har den samme dimension som de tre rumlige retninger.

I dag viser målinger, at den bedste værdi for tæthedsparemeteren $\Omega = 0,9986 \pm 0,005$. Universet er altså indenfor måleusikkerheden fladt, og det vil udvide sig ud i al evighed. De enkelte bidrag er ved hjælp af blandt andet Planck-satellitten målt til at være

$$\Omega_M = 0,04860$$

$$\Omega_{DM} = 0,2589$$

$$\Omega_\Lambda = 0,6911. [1]$$

Det er måske påfaldende, at tæthedsparemeteren er lige præcis 1, og at den synlige del af Universet øjensynligt kun udgør knap 5 % af den samlede masse/energitæthed. Det er vel også ret klart, at når vi kun kan se så lidt af Universet, vil det være ret arrogant at påstå, at vi har en sikker viden om Universets struktur. Man kan derimod sige, at vi har en *matematisk model*, der er god, da den beskriver observationerne godt, og da dens *forudsigelser* også stemmer overens med observationer.

Parametrene ovenfor giver koefficienterne i skalafaktoren $R(t)$. Man kan beregne dem på følgende måde, når t måles i Gyr og krumningen $K_0 = 0$:

$$a = \sqrt[3]{\frac{\Omega_M + \Omega_{DM}}{4 \cdot \Omega_\Lambda}} = \sqrt[3]{\frac{0,0486 + 0,2589}{4 \cdot 0,6911}} = 0,4809 \quad \text{og} \quad b = \frac{3 \cdot H_0}{2} \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda} = \frac{3}{2 \cdot 14,43 \text{ Gyr}} \cdot \sqrt{0,6911} = 0,08639 \text{ Gyr}^{-1}.$$

Vi har ved beregningen af konstanten for b benyttet os af at $H_0 = 67,74 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} = \frac{1}{14,43 \text{ Gyr}}$.

2.2.3 Øvelse – Hubblekonstantens enheder

Omregn $H_0 = 67,74 \text{ km/sMpc}$ til enheden Gyr^{-1} .

3 Fortolkninger ved brug af skalafaktoren $R(t)$

Da vi nu har et godt forslag til en skalafaktor, vil vi prøve at udlede/forudsige noget ud fra den.

1. Vi vil bestemme Universets alder.
2. Vi vil sammenligne modellens forudsigelse af H_0 og den observerede værdi.
3. Vi vil finde ud af hvad der sker med Universet i fremtiden.
4. Vi vil igen se på rødforskydning af fjerne galakser.
5. Vi vil finde Universets temperaturmæssige udvikling.

3.1 Universets alder

Vi ved at skalafaktoren i dag definitions-mæssigt er 1. Dvs. vi kan bruge formel (8) for $R(t)$ til at finde Universets alder t_0 :

$$R(t_0) = 1 = 0,4809 \cdot (e^{0,08639 \cdot t_0} - e^{-0,08639 \cdot t_0})^{\frac{2}{3}}$$

Ovenstående ligning er indviklet at løse analytisk³, men et CAS-værktøj kan hurtigt finde en løsning. Svaret på opgaven viser sig at være $t_0 = 13,8 \text{ Gyr}$.

³ Se formel (27) for et udtryk for t .

3.2 Den nuværende Hubblekonstant

Da $H(t_0)=R'(t_0)$ kan vi differentiere $R(t)$ og indsætte den fundne værdi for t_0 :

$$\begin{aligned}
 R(t) &= 0,4809 \cdot (e^{0,08639 \cdot t} - e^{-0,08639 \cdot t})^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \\
 R'(t) &= 0,4809 \cdot \frac{2}{3} \cdot (e^{0,08639 \cdot t} - e^{-0,08639 \cdot t})^{\frac{-1}{3}} \cdot 0,08544 \cdot (e^{0,08639 \cdot t} + e^{-0,08639 \cdot t}) \Rightarrow \\
 R'(t_0) &= R'(13,799) = 0,4809 \cdot \frac{2}{3} \cdot (e^{0,08639 \cdot 13,799} - e^{-0,08639 \cdot 13,799})^{\frac{-1}{3}} \cdot 0,08639 \cdot (e^{0,08639 \cdot 13,799} + e^{-0,08639 \cdot 13,799}) \Rightarrow \\
 R'(t_0) &= 0,06916 \text{ Gyr}^{-1}
 \end{aligned}$$

Den observerede Hubblekonstant er $H_0 = 67,74 \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$. [1] Vi skal altså have omregnet enhederne, så de passer sammen:

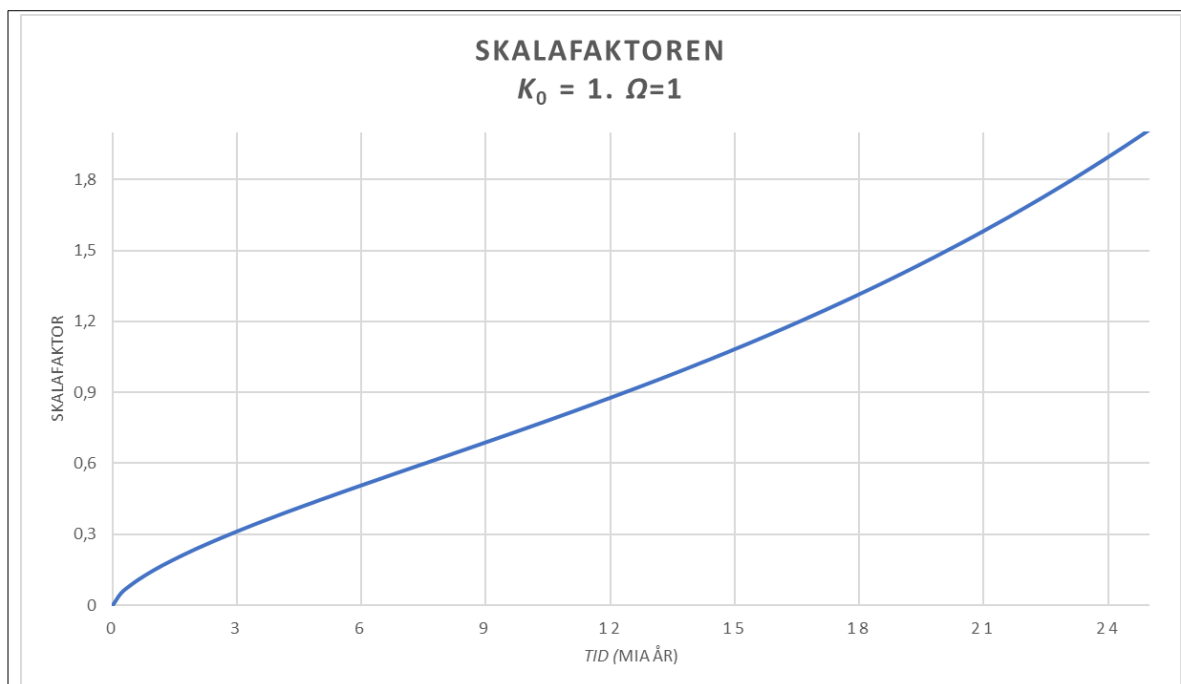
$$\begin{aligned}
 1 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} &= \frac{1 \cdot 10^3 \text{ m}}{\text{s} \cdot 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m} \cdot 10^6} = 3,24 \cdot 10^{-20} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \\
 H_0 &= 67,74 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}} = 67,74 \cdot 3,24 \cdot 10^{-20} \text{ s}^{-1} = 2,195 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1}. \\
 \frac{1}{\text{Gyr}} &= \frac{1}{10^9 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365,256 \text{ s}} = 3,169 \cdot 10^{-17} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \\
 R'(t_0) &= 0,06916 \text{ Gyr}^{-1} = 0,06916 \cdot 3,169 \cdot 10^{-17} \text{ s}^{-1} = 2,1915 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} \approx 2,19 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} = H_0.
 \end{aligned}$$

Man ser altså, at model og observation passer godt sammen, hvad de naturligvis også bør gøre.

3.3 Universets fremtid

Udviklingen af Universet kan findes ved at tegne en graf over skalafaktoren

$$R(t) = 0,4809 \cdot (e^{0,08639 \cdot t} - e^{-0,08639 \cdot t})^{\frac{2}{3}}$$



Figur 9: Skalafaktoren. Universets alder kan aflæses på 1. akse, hvor $R(t) = 1$.

Man ser, at Universet vil udvide sig ud i det uendelige, og at bevægelsen vil ske hurtigere og hurtigere. $R'(t)$ kan som bekendt findes som tangenthældningen af grafen for det ønskede tidspunkt, og man ser at tangenthældningen er stigende for voksende $t > t_0 = 13,8$ Gyr.

3.4 Kosmologisk rødforskydning

Førhen fortolkede man galaksernes rødforskydning som en dopplerforskydning – altså at galakserne bevægede sig i rummet mod eller væk fra os.

Big Bang-teorien giver en ny fortolkning af rødforskydninger, såfremt de er så store, at vi kan se bort fra gravitationel tiltrækning mellem galakserne. Det var Georges Lemaître, der foreslog den nye fortolkning, som siger, at fordi galakserne bevæger sig *sammen med rummet*, og fordi rummet udvider sig, så er rødforskydningen af strålingen fra kosmos et direkte mål for rummets udvidelse.

Lad os regne på problematikken. Rødforskydningen z er defineret i formel 2.

$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\lambda_{\text{målt}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}} = \frac{\lambda_{\text{målt}}}{\lambda_{\text{emit}}} - 1$$

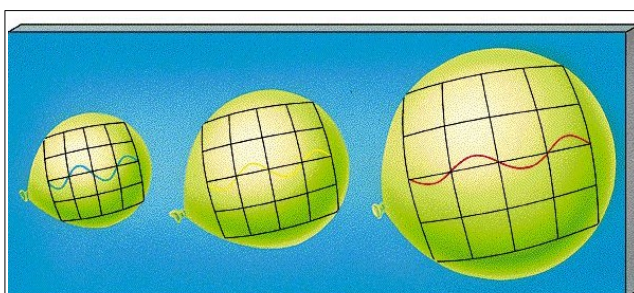
Ovenfor betyder $\lambda_{\text{målt}}$ den bølgelængde, som vi måler i dag, dvs. til tiden t_0 . λ_{emit} betyder den bølgelængde, som bliver udsendt til tiden t .

Eftersom rumtiden strækkes med tiden, vil bølgelængderne ændres i samme takt. Se figur 10. Dvs. hvis afstanden mellem to galakser til to tidspunkter er hhv. $r(t_0)$ og $r(t)$, og hvis der er N bølgelængder mellem de to galakser så gælder ved brug af formel 2 og 7:

$$\frac{r(t_0)}{r(t)} = \frac{N \cdot \lambda(t_0)}{N \cdot \lambda(t)} \Rightarrow \frac{r(t_0)}{r(t)} = 1 + z \Leftrightarrow R(t) = \frac{1}{1 + z} \quad (18)$$

Hvis vi måler rødforskydningen, z , fra en fjern galakse, har vi altså også fundet skalafaktorens værdi til det tidspunkt, hvor lyset blev udsendt. Da skalafaktoren er et mål for Universets størrelse i forhold til i dag, må z altså også være et mål for Universets størrelse.

I afsnit 4 ser vi, at man kan altid kan finde afstande ud fra rødforskydningstallet – også for store værdier af rødforskydningen. Man skal bare vælge en passende kosmologisk model. Det er derfor man i litteraturen tit ser, at afstande netop er anført som rødforskydninger. Ulempen ved at angive afstanden i Gpc er, at hvis modellen er forkert, så bliver afstanden også forkert. Rødforskydningstallet er dog altid korrekt.



Figur 10: Hvis rummet udvider sig, vil bølgelængderne af det lys, der bevæger sig i rummet også forøges. (Lyset strækkes som en elastisk, når rummet udvider sig.) Billedkilde ukendt. Den findes utallige steder på internettet.

3.5 Universets temperatur og rekombinationen

Vi kan også finde temperaturens udvikling med tiden. Hertil benytter vi Wiens forskydningslov, som er vist i formel (6) samt formel (18). Konstanten er uændret, hvilket dermed giver:

$$\begin{aligned}
\lambda(t)_{\max} \cdot T(t) &= 0,0029 \text{ m} \cdot \text{K} = \lambda(t_0)_{\max} \cdot T(t_0) \Leftrightarrow \\
\frac{\lambda(t_0)_{\max}}{\lambda(t)_{\max}} &= \frac{T(t)}{T(t_0)} \wedge 1+z = \frac{1}{R(t)} \Leftrightarrow \\
T(t) &= \frac{T(t_0)}{R(t)} = T(t_0) \cdot (1+z). \tag{19}
\end{aligned}$$

COBE-, WMAP- og Planck-satellitterne målt $T(t_0) = 2,7255 \text{ K}$. Dermed kan vi nu beregne Universets temperatur til alle tider/rødforskydninger.

Atomkerner og elektroner (re)kombinerer ved en temperatur på ca. 3000 K. Dvs. neutrale atomer dannes. Dermed kan lys slippe gennem de neutrale grundstoffer – i plasma vil lys konstant blive spredt på elektronerne, og dermed kan det ikke bevæge sig frit. Tidspunktet hvor kerner og elektroner rekombinerede til neutrale grundstoffer kaldes *rekombinationen*. Navnet er lidt misvisende, fordi det fejlagtigt leder en til at tro, at neutrale gasser fandtes før dette tidspunkt. Vi finder rødforskydningen, da lyset begyndte at flyve frit:

$$3000 \text{ K} = 2,7255 \text{ K} \cdot (1+z) \Leftrightarrow z = \frac{3000 \text{ K}}{2,7255 \text{ K}} - 1 = 1100.$$

Dermed var skalafaktoren $R(t_{\text{rekombination}}) = 1/1101$. Universet var altså under en promille af dets nuværende størrelse. Vi kan også beregne, hvornår det skete, da vi 'bare' skal isolere $t_{\text{rekombination}}$ i formlen for skalafaktoren:

$$R(t_{\text{rekombination}}) = 1/1101 = 0,4809 \cdot (e^{0,08639 \cdot t_{\text{rekombination}}} - e^{-0,08639 \cdot t_{\text{rekombination}}})^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow t_{\text{rekombination}} = 4,73 \cdot 10^{-4} \text{ Gyr} = 473 \text{ kyr}.$$

Den officielle værdi er 379 kyr, som sandsynligvis skyldes, at vores valg af $R(t)$ er ikke helt korrekt. Vi konkluderer, at lyset begyndte at flyve frit ca. 379 kyr efter Big Bang, og vi ser resterne heraf i den kosmologiske baggrundsstråling.

3.5.1 Opgave - Universets alder

1. Benyt formlen for $R(t)$ til at eftervise, at Universets alder er 13,8 Gyr. (Brug f.eks. solver i din lommeregner/CAS-værktøj, eller anvend et regneark til at tegne en graf, som du kan aflæse på.)
2. Find tiden for rekombinationen, dvs. kontroller beregningen anført ovenfor.

3.6 Dannelsen af de letteste grundstoffer

Ovenfor beregnede vi tidspunktet for rekombinationen, som er det tidspunkt, hvor de allerede dannede atomkerner kombinerer med elektroner og danner neutrale grundstoffer. Men hvor kommer kernerne fra?

Teorien siger, at da Universet var mellem 0,01 s og 4 s gammelt, begyndte reaktioner mellem neutroner og protoner. Da de 4 s var gået var omtrent 95 % af stoffet i universet protoner og 5 % af massen var neutroner. Temperaturen var ca. 5 GK. Forholdet mellem *antallet* af neutroner og protoner var $N_n/N_p = 0,05$. [19, p. 171] Derefter var der kun neutronhenfald og almindelige fusionsprocesser tilbage til at ændre i forholdet mellem neutroner og protoner. Neutroner henfalder ved processen ${}^1_0n \rightarrow {}^1_0H + {}^0_{-1}e + \bar{\nu}$. Halveringstiden for den proces er 11^m. Protoner kan ikke fusionere

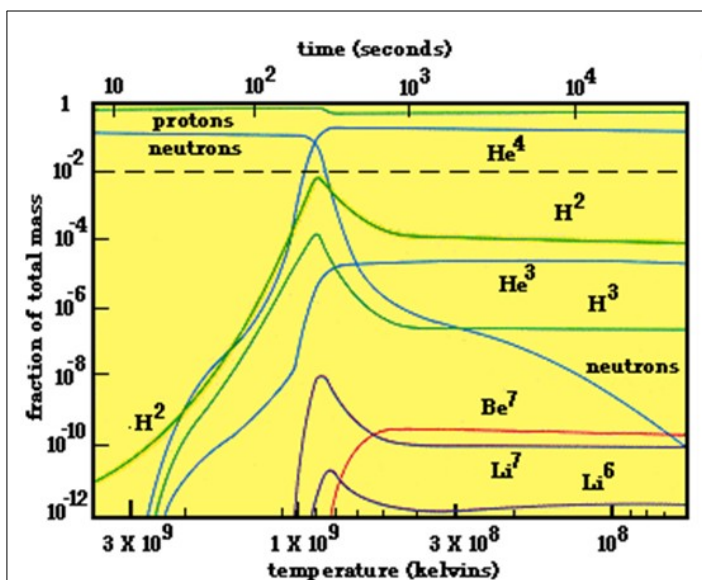
med sig selv, så det endte med et kapløb mellem proton- og neutronprocesser og henfald af neutroner.

Stoftætheden var allerede blevet så lille, at naturen ikke kunne lave He-4 ved kollision af 2 protoner og 2 neutroner. I stedet for skete processerne som angivet nedenfor, og der var kun få minutter til at lave al den nødvendige H-2, da de oprindelige neutroner jo var ustabile. Temperaturen skulle under 1 GK, da fotoner ellers kunne rive de dannede H-2-kerner fra hinanden. [4]

- 1: ${}_0^1n + {}_1^1H \rightarrow {}_1^2H + \gamma$
- 2: ${}_1^2H + {}_1^2H \rightarrow {}_2^3He + {}_0^1n$
- 3: ${}_2^3He + {}_0^1n \rightarrow {}_1^3H + {}_1^1H$
- 4: ${}_1^3H + {}_1^2H \rightarrow {}_2^4He + {}_0^1n$

Da kapløbet var ovre, var der ifølge teorien masseprocenterne 75 % hydrogen og 25 % helium med mikroskopiske mængder af H-2, He-3 og Li-7. Tungere grundstoffer blev senere dannet primært i stjernerne og ved stjerneeksplosioner og endelig ved kollisioner mellem neutronstjerner.

En grafisk fremstilling over dannelsen af de første grundstoffer kan ses på figur 11.



Figur 11: Grundstofsyntese i det tidlige univers. [21]

3.6.1 Opgave - Tidslinje

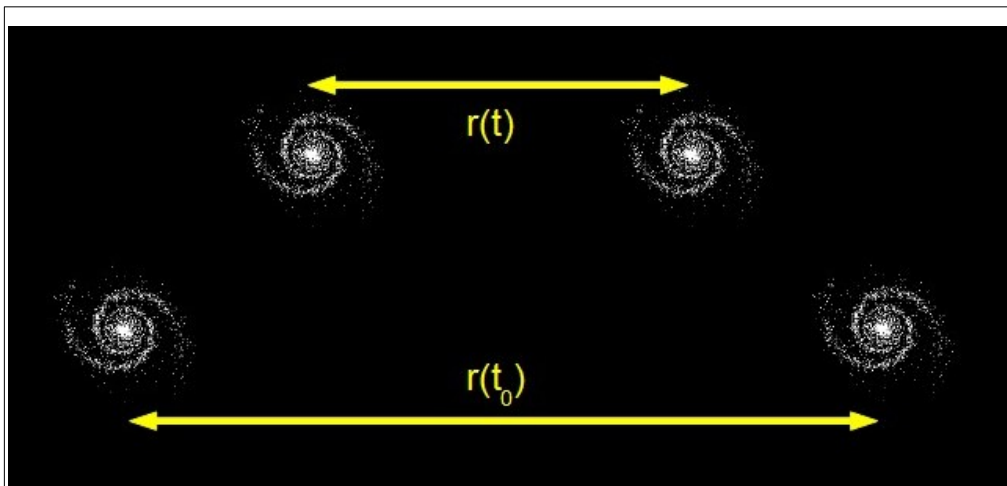
Tegn en tidslinje over Universets udvikling, hvor du inkluderer Big Bang, grundstofdannelse, rekombination og tidspunktet for galaksedannelse. (Se også noten *Mælkevejen og andre galakser.*)

4 Kosmologiske afstande

Rødforskydning af lys (og lyd) er defineret i formel (2). Oprindeligt blev rødforskydningen fortolket som en dopplerforskydning af galaksernes lys i rummet. Doppler viste, at $v = c \cdot z$ for legemer, der bevæger sig bort fra en modtager, hvor v er lysgiverens hastighed i forhold til modtageren af lyset, og c er lysets hastighed. Man forledes måske til at tro, at galakserne bevæger sig *igennem* rummet, og at de bevæger sig bort fra hinanden. Det var også sådan, Hubble fortolkede sine resultater.

Da Big Bang-teorien blev grundlagt af Lemaître⁴, fortolkede han galakseres bevægelser anderledes. Galakserne bevæger sig ganske rigtigt bort fra os, men ikke i et statisk Univers. I stedet for fortolkede han, at galakserne deltager i rumtidens udvidelse (rummets 3 dimensioner og tiden). Foruden deltagelsen i rummets udvidelse, påvirker galakserne naturligvis også hinanden via gravitationen, så der er også lokal bevægelse mellem galakserne i selve rummet.

4 Lemaîtres teori blev offentliggjort i 1927.



Figur 12: Mælkevejen er til venstre og en fjernliggende galakse er til højre. Det lille galaksebillede er lånt fra Paulbourke.net.

4.1.1 Øvelse – baggrunden for rødforskydningsfænomenet

Overvej forskellen mellem den klassiske forståelse af galaksernes rødforskydning og den kosmologiske forståelse af galaksernes rødforskydning.

Man kan derfor rettelig spørge sig selv, om Dopplers formel passer ind i den nye fortolkning. Det vil vi undersøge herunder.

4.2 Rødforskydning som en dopplerforskydning

Formel (18) giver os $1+z = \frac{r(t_0)}{r(t)}$, hvor $r(t)$ angiver afstanden fra Mælkevejen til en galakse til tiden t , og $r(t_0)$ angiver afstanden til galaksen i dag. Se også figur 12.

I det betragtede tidsrum, $\Delta t = t_0 - t$ har galakserne bevæget sig afstanden $\Delta s = r(t_0) - r(t)$. Hvis galaksernes indbyrdes hastighed, v , har været *konstant* i tidsrummet, kan vi skrive den tilbagelagte afstand som $\Delta s = v \cdot \Delta t$. Lyset har omtrent⁵ bevæget sig $r(t_0)$ i tidsrummet Δt , dvs. $r(t_0) = c \cdot \Delta t$, hvor c er lysets hastighed. Nu ved vi nok til at kunne opstille et udtryk for rødforskydningen:

$$\begin{aligned}
 1+z &= \frac{r(t_0)}{r(t)} \wedge \Delta s = r(t_0) - r(t) \wedge \Delta s = v \cdot \Delta t \wedge r(t_0) = c \cdot \Delta t \Leftrightarrow \\
 z &= \frac{r(t_0)}{r(t)} - 1 \wedge v \cdot \Delta t = r(t_0) - r(t) \wedge r(t_0) = c \cdot \Delta t \Leftrightarrow \\
 z &= \frac{r(t_0) - r(t)}{r(t)} = \frac{v \cdot \Delta t}{r(t)} \wedge \Delta t = \frac{r(t_0)}{c} \Leftrightarrow \\
 z &= \frac{v \cdot r(t_0)}{c \cdot r(t)} \approx \frac{v}{c}.
 \end{aligned}$$

⁵ "Omtrent" fordi den faktiske afstand ligger et sted mellem $r(t_0)$ og $r(t_e)$. Galakserne har jo bevæget sig et stykke fra hinanden i tidsrummet.

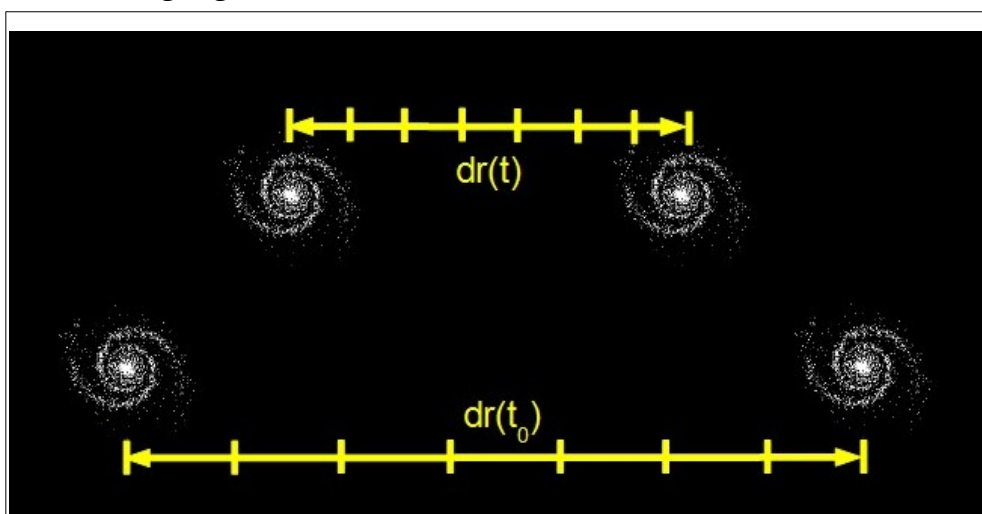
Vi får altså den samme formel for rødforskydningen, som man får ved alm. dopplerforskydning, dog under den forudsætning, at galakserne ikke har bevæget sig ret langt i det forløbne tidsrum.

4.2.1 Øvelse

Gennemgå beregningerne ovenfor og forvis dig om, at du forstår dem.

4.3 Rødforskydning som kosmologisk udvidelse

Hvis lyset har været meget længe undervejs, vil forholdet $\frac{r(t_0)}{r(t)} \neq \sim 1$. Galaksernes relative hastighed, v , vil heller ikke være konstant. Derfor bliver formelen for afstanden mellem to galakser også anderledes. Betragt figur 13.



Figur 13: Lysets bevægelse er splittet op i uendeligt mange små delafstande, $dr(t)$. $dr(t)$ og $dr(t_0)$ angiver afstanden i et lille interval til to tidspunkter. De er forskellige, fordi universet har udvidet sig i tidsrummet fra t til t_0 .

Vi splitter lysets vandring fra galaksen hen til Mælkevejen op i en (uendelig) mængde små strækninger, dr , som lyset bruger, dt , på at tilbagelægge. Lyset bevæger sig selvfølgelig med lysets hastighed, c , og derfor kan vi opskrive intervallerne som $dr(t) = c \cdot dt$. Denne lille strækning, dr , vokser i tidens løb, da Universet udvider sig. Skalafaktoren giver os hvor meget den lille strækning er øget i løbet af det betragtede tidsrum. I dag vil længden af et afstandsinterval dermed være $dr(t_0) = \frac{dr(t)}{R(t)} = \frac{c \cdot dt}{R(t)}$. Vi kan nu summere op, så vi får den samlede tilbagelagte strækning i dag:

$$r(t_0) = \int dr(t_0) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c}{R(t)} dt, \quad (20)$$

t_e angiver tidspunktet, hvor lyset blev udsendt, og t_0 angiver i dag.

I integralet ovenfor er grundenheden for tid Gyr, og derfor skal man også omregne c til en passende enhed. Vi vælger enheden $[c] = \text{Mpc/Gyr}$.

4.3.1 Øvelse – Enhedsomregning for lysets hastighed

Omregn $c = 2,99792458 \cdot 10^8$ m/s til Mpc/Gyr.

4.4 Afstandsberegning

Skalafaktoren er angivet i formel (8) og sammenhængen mellem skalafaktoren og rødforskydningen er angivet i formel (18). Ved at måle z , kan man beregne talværdien af skalafaktoren, og derefter kan man med et CAS-værktøj finde tidspunktet, t_e , for udsendelsen af lyset. Derefter kan $r(t_0)$ bestemmes ud fra formel 20.

4.4.1 Eksempel - Kvasaren 3C 273

Man har målt rødforskydningen for kvasaren 3C283 til $z = 0,159$. (Se f. eks. opgave 16.5 i bogen *Universets melodi*.) Dvs. skalafaktoren har værdien $R(t_e) = \frac{1}{1+0,159} = 0,863$.

Ved brug af et CAS-værktøj, kan man nu finde t_e , som bliver

$$0,863 = 0,4809 \cdot (e^{0,08639 \cdot t_e} - e^{-0,08639 \cdot t_e})^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t_e = 11,8 \text{ Gyr.}$$

Dermed bliver den nuværende afstand til 3C 273:

$$r(t_0) = \int_{11,75}^{13,799} \frac{306,60 \frac{\text{Mpc}}{\text{Gyr}}}{0,4809 \cdot (e^{0,08639 \cdot t} - e^{-0,08639 \cdot t})^{2/3}} dt = 677 \text{ Mpc.}$$

Hvis man benytter sig af den klassiske formel, får man at

$$v = c \cdot z = H_0 \cdot d \Rightarrow d = \frac{c \cdot z}{H_0} = \frac{0,159 \cdot 3,00 \cdot 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}}}{67,7 \frac{\text{km}}{\text{s} \cdot \text{Mpc}}} = 705 \text{ Mpc.}$$

Altså en afvigelse på 28 Mpc. Dopplers klassiske formel, $v = c \cdot z$, bryder altså sammen for store rødforskydninger.

I opgaverne herunder kan du f. eks. benytte Python-programmet *Kosmologi* eller *nSpire*-programmet *kosmo.tns*, som findes på webstedet astro-gym.dk.

4.4.2 Opgave - Post starburst galakser

Nogle specielle galakser har fået målt rødforskydninger på $z = 0,8$. [16]

- Beregn det tidspunkt lyset blev udsendt.
- Beregn den nuværende afstand til galakserne.
- Sammenlign med den værdi, som man får med Hubbles lov og formlen $v = cz$.

4.4.3 Opgave - Gamma Ray Burst GRB 090429B

Man har målt rødforskydningen for et gammaudbrud til $z = 9,4$. [17]

- Beregn det tidspunkt lyset blev udsendt.
- Beregn den nuværende afstand til GRB 090429B.
- Sammenlign med den værdi, som man får med Hubbles lov og formlen $v = c \cdot z$.

-0-

Ovenstående opgaver viser, at har man målt rødforskydninger $z > 0,1$, så duer den klassiske dopplerformel $v=c \cdot z$ ikke. Der findes en relativistisk version af Dopplers lov, men den gælder heller ikke i kosmologien, da vi fortolker hastighederne som værende en del af universets udvidelse.

4.5 Afstandsberegning uden brug af tiden

En anden måde at bestemme afstande på, er ved at anvende en formel, hvor kun z indgår i ligningen. Vi tager udgangspunkt i formlerne (13) og (20):

$$R'(t)^2 = \frac{\Omega_0 \cdot H_0^2}{R(t)} + H_0^2 \cdot R(t)^2 \cdot \Omega_\Lambda - K_0 \cdot c^2 \quad \text{samt} \quad r(t_0) = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c}{R(t)} dt.$$

Vi deler formel (13) med $R(t)^2$, hvorefter vi definerer en ny variabel $x = R(t)^{-1}$ og substituerer $R(t)$ væk. Det giver

$$\begin{aligned} \left(\frac{R'(t)}{R(t)} \right)^2 &= \frac{\Omega_0 \cdot H_0^2}{R(t)^3} + H_0^2 \cdot \Omega_\Lambda - \frac{K_0 \cdot c^2}{R(t)^2} = \Omega_0 \cdot H_0^2 \cdot x^3 + H_0^2 \cdot \Omega_\Lambda - K_0 \cdot c^2 \cdot x^2 \Rightarrow \\ \left(\frac{R'(t)}{R(t)} \right) &= \sqrt{\Omega_0 \cdot H_0^2 \cdot x^3 + H_0^2 \cdot \Omega_\Lambda - K_0 \cdot c^2 \cdot x^2}. \end{aligned}$$

Vi har set bort fra den negative løsning ovenfor, da universet er voksende for alle tider - vi så jo at tæthedsparameteren er 1, og derfor vil universet aldrig trække sig sammen igen. Derfor må $R'(t)$ altid være positiv, og $R(t)$ er definitions-mæssigt altid positiv.

Vi ser også, at da $x = R(t)^{-1}$ så gælder at

$$dx = \frac{-dt \cdot R'(t)}{R(t)^2} \Leftrightarrow dt = \frac{-R(t)^2}{R'(t)} \cdot dx.$$

Nu kan vi indsætte i formel 20, og det giver

$$\begin{aligned} r(t_0) &= \int_{t_e}^{t_0} \frac{c}{R(t)} dt = \int_{1+z}^1 \frac{c}{R(t)} \cdot \frac{(-R(t)^2)}{R'(t)} dx = - \int_{1+z}^1 c \cdot \frac{R(t)}{R'(t)} dx \Leftrightarrow \\ r(t_0) &= - \int_{1+z}^1 \frac{c}{\sqrt{\Omega_0 \cdot H_0^2 \cdot x^3 + H_0^2 \cdot \Omega_\Lambda - K_0 \cdot c^2 \cdot x^2}} dx. \end{aligned}$$

Ovenfor er integrationsgrænserne også ændret. Ved $x(t_e) = R(t_e)^{-1} = 1+z$, og ved $x(t_0) = 1$. Hvis vi også vender grænserne om, kan vi fjerne minusset foran integralet. Dvs.

$$r(t_0) = \int_1^{1+z} \frac{c}{\sqrt{\Omega_0 \cdot H_0^2 \cdot x^3 + H_0^2 \cdot \Omega_\Lambda - K_0 \cdot c^2 \cdot x^2}} dx. \quad (21)$$

Ovenstående formel kan *altid* bruges såfremt vi kender tæthedsparametrene, Ω_i , og hubblekonstanten. Krumningen, K_0 , kan vi beregne ved hjælp af (17).

4.5.1 Eksempel - Kvasaren 3C 273 igen

Vi har målt $z = 0,159$, $K_0 = 0$, $\Omega_\Lambda = 0,6911$, $\Omega_0 = 1 - 0,6911 = 0,3089$, $H_0 = 67,74$ km/sMpc. Lysets hastighed $c = 2,9979 \cdot 10^5$ km/s. Vi kan indsætte i formen (21), eller bruge programmet *kosmo.tns* fra *astro-gym.dk*, og vi får:

$r(z = 0,159) = 677$ Mpc, hvilket naturligvis stemmer godt overens med beregningen på foregående side.

4.5.2 Opgave (Meget svær) - Partikelhorisonten

Vil du overspringe denne SRP-lignende opgave, så hop direkte ned til afsnit 4.6. Opgaven her kan evt. bruges som en del af en SRP-besvarelse i kosmologi sammen med MAT A i emnet hyperbolske funktioner.

Man definerer partikelhorisonten, som den fjerneste afstand, vi kan måle lys fra. Dvs. det er en *teoretisk* afstand for det synlige univers, da vi som bekendt kun kan se tilbage til rekombinationen. Du skal her finde partikelhorisontens hastighed ved Big Bang under antagelsen om, at den tidligere fundne skalafaktor er gyldig ved $t = 0$.

- a) For hvor lang tid siden må dette (fiktive) lys fra partikelhorisonten være udsendt?

Afstandsformlen (20) eller (21) kan bruges til beregne hvor langt væk en galakse er – her skal man huske, at galaksen sidder fast i rumtiden. Det gør partikelhorisonten ikke, da den farer væk fra os. Den fysiske afstand til partikelhorisonten er defineret ved formlen

$$d_{ph}(t) = \int_0^t \frac{c}{R(\tau)/R(t)} d\tau \quad (22)$$

Ovenfor er $R(t)$ som vanligt skalafaktoren, som er 1 i dag. Skalafaktoren (nævneren i formelen ovenfor) er renormeret til 1 ved tidspunktet t ved at dele med $R(t)$. (Bemærk symbolerne for den uafhængige variabel er uens.) Man skal jo renormere nævneren, da skalafaktoren for en observatør ved tiden t , vil definere dette. Hvis man rokerer lidt rundt på (22) fås

$$d_{ph}(t) = R(t) \cdot \int_0^t \frac{c}{R(\tau)} d\tau \quad (23)$$

Argumentationen er lidt ligesom i afsnit 4.3. Integralet svarer til den afstand lyset rejser undervejs fra Big Bang til os, og når man ganger $R(t)$ på, tager man højde for at universet ved tiden t var mindre end i dag.

- b) Beregn $d_{ph}(t_0)$.
 c) Differentier (22) mht tiden.
 d) Reducer på udtrykket, idet du anvender fundamentalsætningen fra infinitesimalregningen:

$$\frac{d}{dt} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = f(t) \quad (24)$$

e) Vis udtrykket

$$v_{ph}(t) - c = R'(t) \cdot \int_0^t \frac{c}{R(t)} dt. \quad (25)$$

Eftersom $R(t)$ er kendt, kan man med et CAS-værktøj nemt finde hastigheden af partikelhorisonten – undtagen ved big bang. Her ønsker vi netop at finde $v_{ph}(0)$. For at kunne løse højresiden af udtrykket ovenfor, skal man lave en grænseværdiundersøgelse, for både $R'(t)$ og integralet divergerer, hvis man indsætter 0 på t 's plads. Man skal benytte *L'Hôpitals* regel i det følgende, så man skal starte med at differentiere skalafaktoren 2 gange.

Differentiationerne bliver ret trælse, hvis man beholder eksponentialfunktionerne i udtrykket for $R(t)$, men problemet kan minimeres, hvis man indser, at skalafaktoren kan skrives ved hjælp af den hyperbolske funktion $\sinh(x)$. Det viser sig dermed, at skalafaktoren kan skrives som

$$R(t) = a \cdot \sinh^{\frac{2}{3}}(b \cdot t), a = 0,7634, b = \frac{0,08639}{\text{Gyr}} \quad (26)$$

- f) Overbevis dig om (26) ved at slå definitionen af $\sinh(x)$ op omregne skalafaktoren.
- g) Differentier $R(t)$ ved at bruge differentiationsreglerne for hyperbolske funktioner.
- h) Differentier $R'(t)$.
- i) Definer funktionerne $A(t) = \int_0^t \frac{c}{R(t)} dt$ og $B(t) = \frac{1}{R'(t)}$, og differentier dem.
- j) Indsæt udtrykkene for $R(t)$, $R'(t)$ og $R''(t)$ i $A'(t)$ og $B'(t)$.
- k) Lav grænseværdiundersøgelse for højresiden af (25) ved at bruge *L'Hôpitals* regel.
- l) Vis dermed, at $v_{ph}(0) = 3c$, hvor c er lysets hastighed.
- m) Beregn også $v_{ph}(t_0)$ og sammenlign med resultatet fra ovenstående spørgsmål.

I relativitetsteorien gælder en regel om, at intet legeme lokalt set må bevæge sig hurtigere end lyset, men partikelhorisonten er ikke et legeme, så relativitetsteorien er ikke brudt.

-0-

4.6 Analytisk udtryk for udsendelsestidspunktet

Skalafaktoren på formen i formel (14) er anvendt ved beregning af afstand og udsendelsestidspunktet for lyset. Det er dog muligt at isolere tiden, så man slipper for at bruge et CAS-værktøj til at bestemme udsendelsestidspunktet, t_e .

Det viser sig, at udsendelsestidspunktet for en model hvor $K_0 = 0$, er givet ved følgende udtryk

$$t_e = \frac{2}{3 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda}} \cdot \ln \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_0} \cdot R^3 + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_0} \cdot R^3 + 1}} \right) = \frac{2}{3 \cdot H_0 \cdot \sqrt{\Omega_\Lambda}} \cdot \ln \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_0} \cdot (1+z)^{-3} + \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_0} \cdot (1+z)^{-3} + 1}} \right). \quad (27)$$

I formlen ovenfor er benyttet, at $R(t) = (1+z)^{-1}$. For at få en fornuftig tidsenhed, bør Hubble-konstanten angives i enheden Gyr^{-1} , se afsnit 3.2.

Læseren kan, for eksempel i forbindelse med en SRP-opgave i mat A og As C, overveje hvordan formel (27) er beregnet, og som tillæg kan man undersøge, hvordan udtrykket bliver, hvis man undlader at antage et Big Bang-scenario, hvor skalafaktoren som bekendt er $R(0) = 0$.

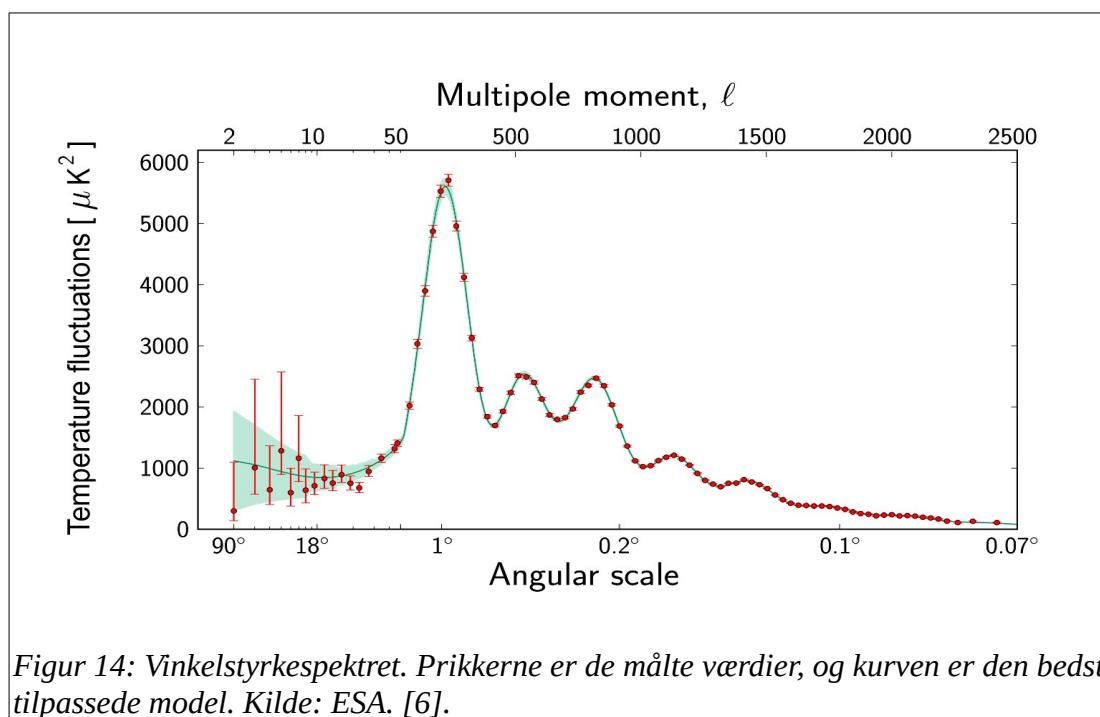
5 Vinkelstyrkespektret

Igennem noten har vi benyttet bestemte værdier for tæthedsparementrene Ω_{DM} , Ω_{Λ} , og H_0 , uden at nævne, hvordan folkene bag Planck-satellitten har fundet tallene. Det skyldes, at det er meget indviklet at bestemme parametrene. Vi kan dog godt få et overfladisk indtryk af tankegangen bag, og den vil blive gennemgået her.

Betragt billedet på forsiden af noten. Det viser Planck-satellitens målinger af fluktuationerne i den kosmologiske baggrundsstråling over hele himmelkuglen. De blå områder er "kolde" områder, og de røde områder er "varme" områder. I virkeligheden er det hele koldt, nemlig i gennemsnit 2,7255 K. Fluktuationerne ligger på ca. 0,3 mK.

Hvis man kigger nøje efter, kan man se, at størrelsen af de små prikker varierer lidt, og hvis man måler hyppigheden af pletter, som funktion af deres vinkeludstrækning/størrelse, kan man tegne figur 14. Denne møjsommelige- og tidskrævende opgave har man sat en computer til at løse.

Derefter har man anvendt ganske komplicerede beregninger til at modellere det målte spektrum, og når man tilpasser teoriens parametre med det observerede spektrum, finder man værdierne af hubblekonstanten samt tæthedsparementrene. Resultatet for tilpasningen kan ses på figur 14.



Man ser, at model og målinger passer ganske godt sammen for små vinkler, som er vist til højre på grafen, men for store vinkler er der afvigelser, hvilket indikerer, at der stadigvæk er noget ved den kosmologiske model, der *muligvis* skal justeres – muligvis, fordi usikkerheden på målingerne med store vinkler er ret store, så måske passer det hele sammen alligevel.

5.1 Inflation

En sidste ting, man kan undres over, er at Universet er i temperaturmæssig ligevægt. Hvis temperaturen skal være konstant overalt, skal alle områder i Universet jo på et tidspunkt have kunnet vekselvirke med alle andre områder, så temperaturforskelle kunne udlignes. Den bedste forklaring på det problem er, at Universet over et meget kort tidsrum fra Universet var ca. 10^{-36} s

gammelt til det var 10^{-32} s udvidede sig fra atomstørrelse til en størrelse på omtrent 1 m i diameter. Den fysiske forklaring er, at den mørke energi skabte denne hurtige udvidelse. Dvs. at skalafaktoren, der er omtalt i denne note ikke duer for meget høje rødforskydninger, da den jo ikke inkluderer inflation. Men den er god i hvert fald tilbage til rekombinationen, hvor $z = 1100$. [4], [18].

6 Konklusion

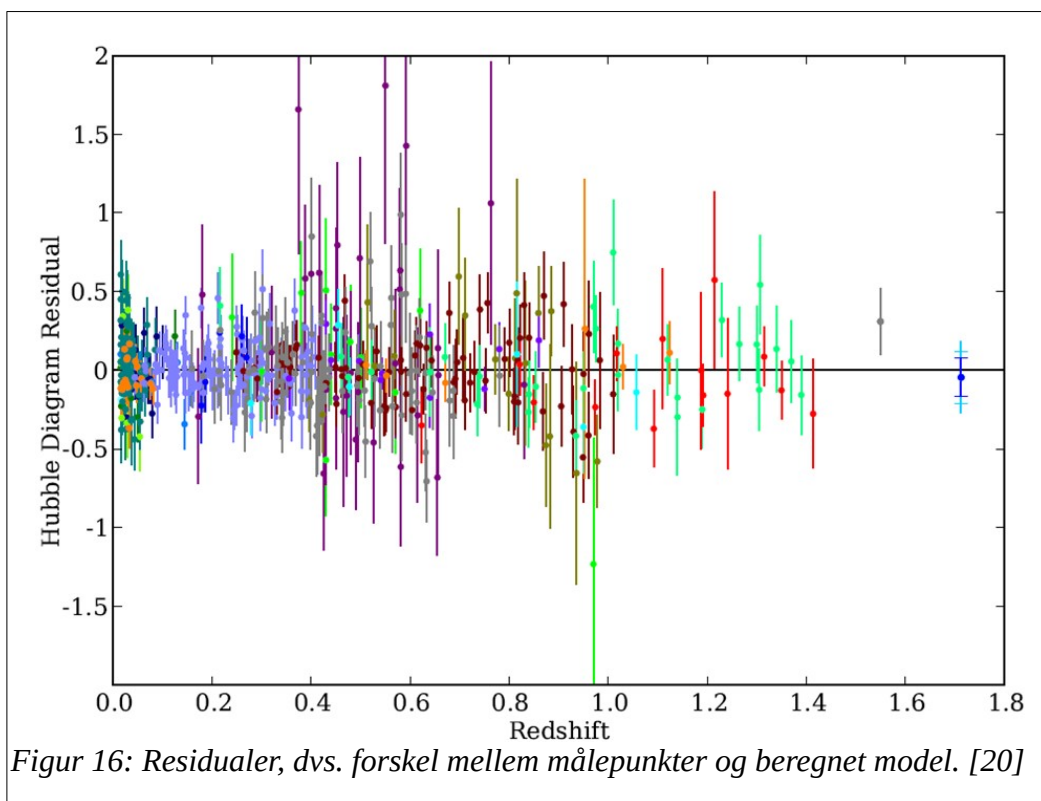
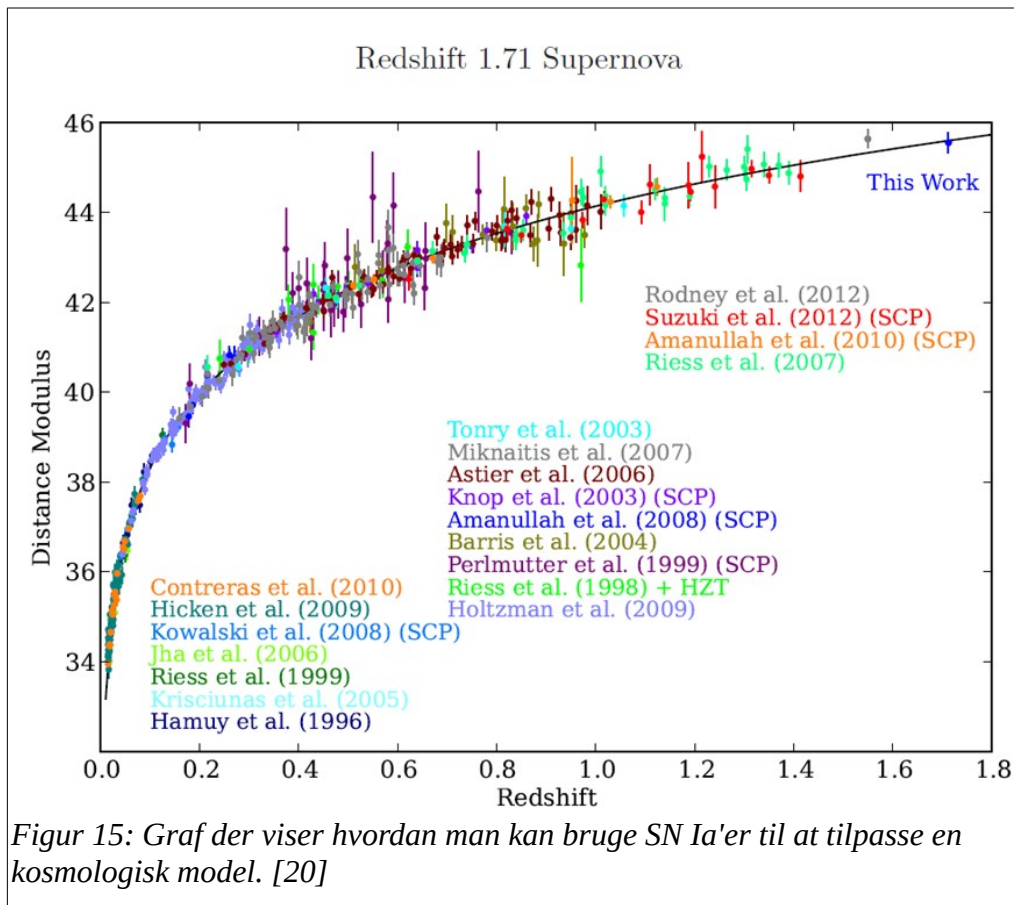
Med en funktion for skalafaktoren bliver man i stand til at beregne mange interessante størrelser for Universet. Vi har bestemt alder, tidspunkt for rekombinationen, tjekket $R'(t_0)$ med den målte hubblekonstant, fundet rødforskydning og temperaturudvikling af Universet. Vi har også opstillet formler til at finde aktuelle afstande på allerstørste skala.

Endelig har vi til sidst set, at observationer og model stadigvæk mangler lidt for passe perfekt sammen, og vi mangler naturligvis at forstå hvad mørkt stof og mørk energi er for noget.

7 Referencer

1. "Planck 2013 Results XVI. Cosmological Parameters." Astronomy & Astrophysics, manuscript draft no. draft p. 1011, March 22, ESO, 2013. <http://arxiv.org/abs/1303.5076>
2. "Big Bang. Kosmologi med mekanik" af Helge Kastrup, Munksgaards dimensioner.
3. Kurt Jakobsen, "Universer og Universet." Fysikforlaget, 2003.
4. "Cosmology 4th edition" af Michael Rowan-Robinson, Clarendon Press, Oxford, 2004.
5. Holger Nielsen, "Kosmologi", Forlaget HAX 2016. (Efter min mening en god bog.)
6. <http://sci.esa.int/planck/51555-planck-power-spectrum-of-temperature-fluctuations-in-the-cosmic-microwave-background/>
7. <https://uvm.dk/-/media/filer/uvm/gym-laereplaner-2017/stx/studieretningsprojektet-stx-august-2017.pdf?la=da>
8. Yadav, Jaswant; J. S. Bagla; Nishikanta Khandai (25 February 2010). "Fractal dimension as a measure of the scale of homogeneity". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. **405** (3): 2009–2015. *arXiv*:1001.0617. *Bibcode*:2010MNRAS.405.2009Y.
9. https://lambda.gsfc.nasa.gov/data/cobe/firas/monopole_spec/firas_monopole_spec_v1.txt
10. Pearson Education. Billede taget fra: <http://www.astro.wisc.edu/~sparke/ast103/lecture26.html>
11. <http://galileo.phys.virginia.edu/classes/USEM/Origin/notes/03/cosmology.html>
12. <https://www.pnas.org/doi/full/10.1073/pnas.15.3.168>
13. <https://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau1812/>
14. ESA samt <https://videnskab.dk/naturvidenskab/big-bang-teorien-blev-skabt-af-katolsk-praest>
15. http://www.cfa.harvard.edu/supernova/highz/illustrationes/hz_highzhub_col_bothbig.gif
16. <http://arxiv.org/pdf/0805.0004v3.pdf>
17. <http://arxiv.org/abs/1105.4915>
18. [https://en.wikipedia.org/wiki/Inflation_\(cosmology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Inflation_(cosmology))
19. Barbara Ryden: *Introduction to Cosmology*, 2nd ed, Cambridge University Press 2017.
20. Rubin et al: *PRECISION MEASUREMENT OF THE MOST DISTANT SPECTROSCOPICALLY CONFIRMED SUPERNOVA Ia WITH THE HUBBLE SPACE TELESCOPE*. *ApJ*, **763**, 1.
21. <https://www.astro.ucla.edu/~wright/BBNS.html>

8 Appendiks 1



9 Appendiks 2: SRP i matematik og astronomi/fysik

Herunder er der nogle forslag til indhold i SRP-opgaver, hvor kosmologi indgår. Jeg er ikke matematiklærer, så man skal kun tage forslagene som en grov skitse til SRP-opgaver.

Læreplanen for studieretningsprojektet, 2017 [7], siger følgende:

Eleverne skal kunne:

- afgrænse, formulere og begrunde en problemformulering på baggrund af en kompleks faglig problemstilling
- besvare en stille opgaveformulering, således at der er overensstemmelse mellem opgaveformuleringen og opgavebesvarelsen
- planlægge og gennemføre en undersøgelse af en problemstilling med anvendelse af viden, kundskaber og metoder fra indgående fag
- demonstrere faglig indsigt og fordybelse ved at beherske relevante faglige mål i indgående fag og ved at sætte sig ind i relevante nye faglige områder
- udvælge, anvende og kombinere forskellige faglige tilgange og metoder
- udvælge, bearbejde og strukturere relevant materiale
- gøre sig metodiske og basale videnskabsteoretiske overvejelser i forbindelse med behandling af en kompleks faglig problemstilling
- skriftligt formidle et fagligt område og beherske fremstillingsformen i en faglig opgave, herunder citatteknik, noter, kildefortegnelse, omfang og layout
- mundtligt formidle et fagligt arbejde og de væsentligste konklusioner samt indgå i en faglig dialog herom.

Hvis studieretningsprojektet omfatter innovation, skal eleverne kunne udvikle og vurdere innovative løsningsforslag.

9.1 Kosmologi og differentialligninger

Har man Mat B og Fysik A kan 1. ordens differentialligninger gennemgås. Man kan benytte teorien til at finde skalafaktoren for et Einstein-de Sitter univers (Krumning $K = 0$ og $\Omega_\Lambda = 0$) ved at løse Friedmanligningen formel (13).

Dernæst kan eleven eftervise løsningen formlerne (13)-(14) for et fladt univers. Det kan f.eks. ske ved differentiation af formel (14) og indsættelse i formel (13).

Eleven kan bruge skalafaktoren til at beregne universets alder for forskellige typer flade universer.

Endelig kan eleven finde et objekt med høj rødforskydning (f.eks. $z > 1$) og regne udsendelsestidspunkt for lyset samt afstanden⁶ til objektet i dag og ved udsendelsestidspunktet. Se f.eks. [Caltechs NED-database](#).

9.2 Kosmologi og differentialligninger II

Har man Mat A og astronomi C/Fysik ABC kan man foruden differentialligningsløsning også se på algebra.

Man kan skitsere løsningen af formel 13 ved brug af separation af variable og et opslag i en integraletabel. Undervejs kan eleven isolere $t(R)$, hvor t er tiden for udsendelsen af lyset og R er skalafaktorens værdi. Se formel (27).

Eleven kan bruge skalafaktoren til at beregne universets alder for forskellige typer flade universer, og man kan tegne grafer mellem rødforskydningen, tidspunktet for udsendelse af lyset, og skalafaktorens værdi.

⁶ Formel til beregning af afstanden er skitseret i Kosmologi-noten, men den er ikke helt korrekt udledt. Eleven kan vælge at arbejde med afstandsbestemmelse med udgangspunkt i Kurt Jakobsens bog, eller bare bruge formlen. (Se litteraturlisten ovenfor.)

Endelig kan eleven finde et objekt med høj rødforskydning (f.eks. $z > 1$) og regne udsendelsestidspunkt for lyset samt afstanden til objektet i dag og ved udsendelsestidspunktet. Se f.eks. [Caltechs NED-database](#).

9.3 Anvendelser af skalafaktoren og Hyperbolske funktioner

Mat A: Arbejd med $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ og differentiationsregler. As: Arbejd med skalafaktoren og afstandsbestemmelser i kosmologien. Løs herunder opgave 4.5.2 hvor partikelhorisonten behandles.

Alfabetisk indeks

baggrundsstråling.....	5, 17, 25
cepheidestjerner.....	4
ekspansion.....	3
Friedmann-ligningerne.....	10
Grundstofhyppighed.....	3
Hubble-konstant.....	4
Hubble-Lemaître-loven.....	4, 7f.
Hubblekonstant.....	15
hubblekonstant.....	8, 13, 26
Inflation.....	25, 27
inflation.....	26
radialhastighed.....	4
rekombinationen.....	16f., 26
Rødforskydning.....	16, 18ff.
rødforskydning.....	4, 12ff., 16ff., 26, 30
Skalafaktoren.....	7, 20f., 24
skalafaktoren.....	4, 7f., 11, 13ff., 21, 24, 26, 29f.
Tæthedsparametrene.....	12
tæthedsparametrene.....	12, 22, 25
ubblekonstant.....	22, 25
Vinkelstyrkespektret.....	25