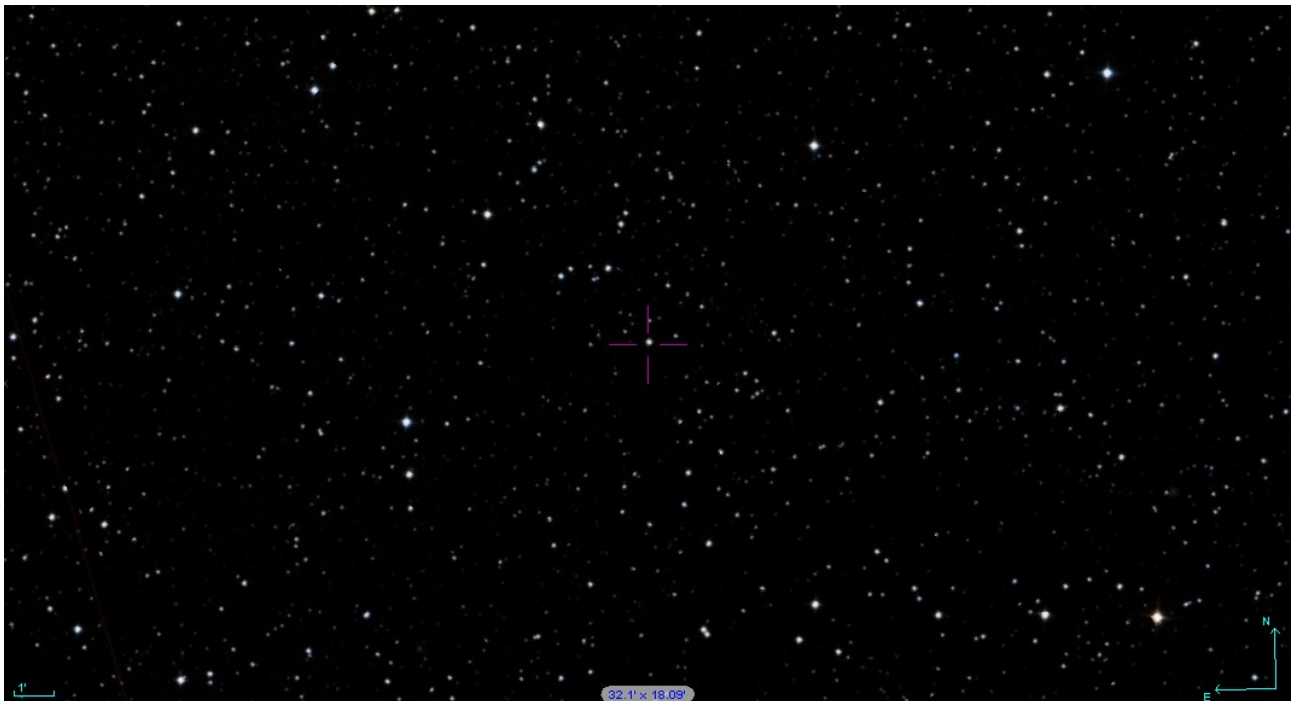


Exoplaneter



Stjernen Qatar-1 har en (usynlig) planet kredsende om sig. (Kilde: Simbad-databasen.)

Michael Andrew Dolan Møller
Rosborg Gymnasium og Hf-kursus
Maj 2012
Opdateret juni 2026

Indholdsfortegnelse

1	Introduktion.....	3
2	Detektion af lys.....	3
2.1	Fotometri.....	4
2.1.1	Eksempel.....	5
2.2	Spektre.....	5
2.2.1	Eksempel.....	6
3	Planetbevægelsesmodeller.....	7
3.1	Radialhastighedsmetoden – cirkulær bane.....	7
3.1.1	Eksempel - Stjernen 51 Pegasi.....	9
3.1.2	Eksempel - HD330075.....	10
3.1.3	Opgave - Prox Cen b.....	10
3.1.4	Opgave - Kepler-20 b.....	10
3.2	Radialhastighedsmetoden for ellipsebane – svært.....	10
3.3	Numerisk analyse af radialhastighedskurver.....	13
3.3.1	Kørsel af programmet Exofit for PC-brugere.....	13
4	Transitmetoden.....	13
4.1	Planetens radius i forhold til stjernens radius.....	14
4.1.1	Radiusbestemmelse udfra størrelsesklasser.....	15
4.2	Planetbanens inklinations.....	15
5	Exoplaneters atmosfærer.....	18
5.1	Temperaturen af en exoplanet.....	18
5.2	Flydende vand?.....	20
5.2.1	Opgave - Qatar-1 b's atmosfære.....	20
5.3	En atmosfæremodel med drivhuseffekt.....	21
5.3.1	Opgave – Solens middelflux.....	21
5.3.2	Atmosfæren.....	23
5.3.3	Jordoverfladen.....	23
6	Fremtidens missioner.....	24
7	Større opgaver.....	26
7.1	Lyskurve for TrES-3b.....	26
7.2	Radialhastighedskurve for exoplaneten Qatar-1b.....	27
7.3	Transitkurve for exoplaneten Qatar-1b.....	27
7.3.1	Hjælp til identifikationen af stjernen.....	27
7.3.2	Databehandling.....	28
7.4	Opgave. Exoplanetdata.....	28
7.5	Opgave. Drivhuseffekten.....	29
7.6	Jordens atmosfære og CO ₂ -indhold.....	30
8	Referencer.....	31

1 Introduktion

Siden den første exoplanet blev opdaget i 1995 af Mayor og Queloz, er der til dags dato (juni 2026) fundet over 6298 exoplaneter, og der er derudover flere tusinde kandidater, der mangler at blive endeligt bekræftet. [12], [20]

Dermed startede Mayor og Queloz en ny gren af astronomien, som man forventer store ting af – blandt andet kan vi lære at forstå, hvordan planetsystemer formes i langt større detalje end vores nuværende viden tillader os, vi kan måske få dybere indsigt i forståelsen af livet. Endelig bliver det måske muligt i en nærmere fremtid at finde liv på en anden klode.

I denne tekst lærer du at analysere data, så du kan finde radius, masse og banehældning af en exoplanet om dens stjerne, og du bliver i stand til at vurdere temperaturen af planet-atmosfærer.

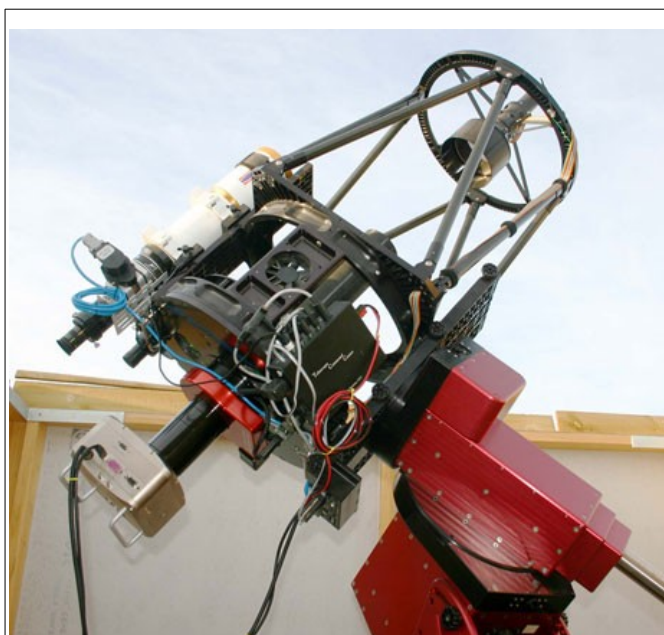
2 Detektion af lys

Den bedste måde, vi kan lære om indholdet af verdensrummet, er ved at måle på det lys, som stjerner, tåger, planeter mv. udsender. Al information om for eksempel planetsystemer skal derefter trækkes ud af det lys, som registreres af observatøren. Det lyder jo som en formidabel opgave, men matematikken og lidt snilde kan hjælpe os med at løse denne opgave.

Uanset om man observerer et legeme fra Jorden eller fra en satellit, er princippet det samme – man skal bruge et apparat til at indsamle lyset samt et apparat til at lagre lyset. Dertil bruger man en kikkert samt et digitalkamera. På figur 1 er et spejlteleskop vist. Lyset kommer ind øverst fra højre, rammer et stort, krumt spejl, hvorefter det reflekteres op i det lille spejl, som sidder monteret oppe i toppen af kikkerten. Derefter reflekteres lyset ned i det grå kamera nederst til venstre på billedet.

Fordelen ved at bruge en kikkert er, at man kan samle lys fra et stort areal, og dermed bliver det muligt at se lyssvage legemer – men bemærk at stjernerne er så langt væk, at det er ganske umuligt at bruge en kikkerts forstørrelsessevne til noget.

Når lyset rammer kameraets lysfølsomme område, CCD-detektoren, laver elektronikken det indkommende signal om til en række tal, som kan indlæses i en computer. Små tal svarer til små lysstyrker og store tal svarer til store lysstyrker. Disse tal kan man så analysere ved hjælp af computerprogrammer.



Figur 1: Et teleskop med en detektor anbragt i enden. Læg mærke til at det ikke er nødvendigt med et kikkertrør, såfremt man observerer på et mørkt og ustøvet sted. [13].

På figur 2 kan man se et billede af nogle stjerner. Programmet Aladin har fortolket alle måletallene og tegnet et billede. Billedet er vist som et negativ.

2.1 Fotometri

Man kan nemt forestille sig, at hvis stjernelyset forstyrres på sin vej mod kameraet, kan det ødelægge kvaliteten af dataene. Dette sker i vid udstrækning, når lyset passerer ned gennem Jordens atmosfære, og derfor bruger astronomer satellitter til at foretage ultrapræcise målinger. Vi kan dog til en vis grad tage højde for atmosfærens indvirkning på lyset, hvis vi benytter os af en disciplin, der kaldes differentialfotometri, hvor vi anvender et logaritmisk mål for den målte lysstyrke og sammenligner lys fra flere stjerner.

Betragt figur 2. Der er vist flere stjerner, vi kan måle på. Vi vælger en.

Stjernen antages, at sende lige meget lys ud i alle retninger, og hvis stjernens samlede effekt¹ kaldes L , vil en observatør i afstanden d modtage en flux²

$$F(d) = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot d^2}. \quad (1)$$

Formlen kaldes for afstandskvadratloven. Se figur 3 for flere detaljer.

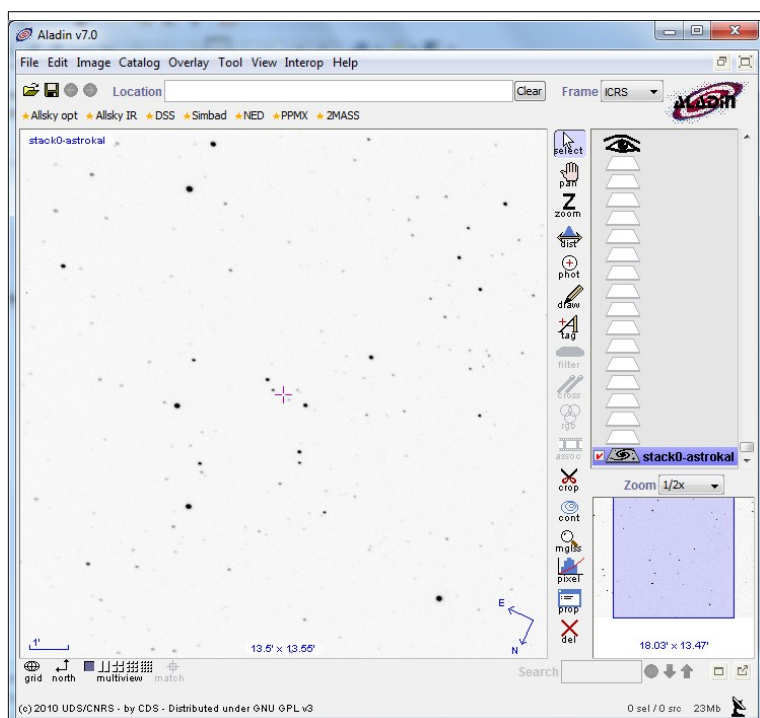
Afhængigt af ens udstyr vil en observatør måle en effekt eller et tælleantal, f , som er proportional med $F(d)$.

Instrumentstørrelsesklassen, m , defineres som

$$m = -2,5 \cdot \log(f). \quad (2)$$

Denne størrelse afhænger af det anvendte udstyr, observationsstedet, stjernens højde over horisonten samt atmosfærens temperatur og sammensætning på observationstidspunktet.

Det interessante ved instrumentstørrelsesklassen er, at de parametre i kikkertopsætningen, der giver varierende instrumentstørrelsesklasser virker på samme måde for to forskellige stjerner, der observeres på samme tidspunkt, og det viser sig, at hvis man måler forskelle i instrumentstørrelsesklasser, så forsvinder bidraget fra disse parametre.



Figur 2: Et billede af nogle stjerner, hvor der med sikkerhed er fundet en planet om en af stjernerne. (Qatar-1b.) [5]. Billedet er vist med programmet Aladin, og billedet er optaget af André van der Hoewen

¹ Astronomer kalder stjernens effekt for den *absolutte luminositet*.

² Astronomer kalder fluxen, F , for den *tilsyneladende luminositet*.

2.1.1 Eksempel

Vi mistænker en stjerne for at have en exoplanet om sig. Vi måler effekten (et pixel-tællertal) fra stjernen, og vi får $f_1 = 35671$. Stjernen ligger i et område, hvor der er andre stjerner. Effekten for en af de andre stjerner måles til $f_2 = 40982$.

Dermed bliver

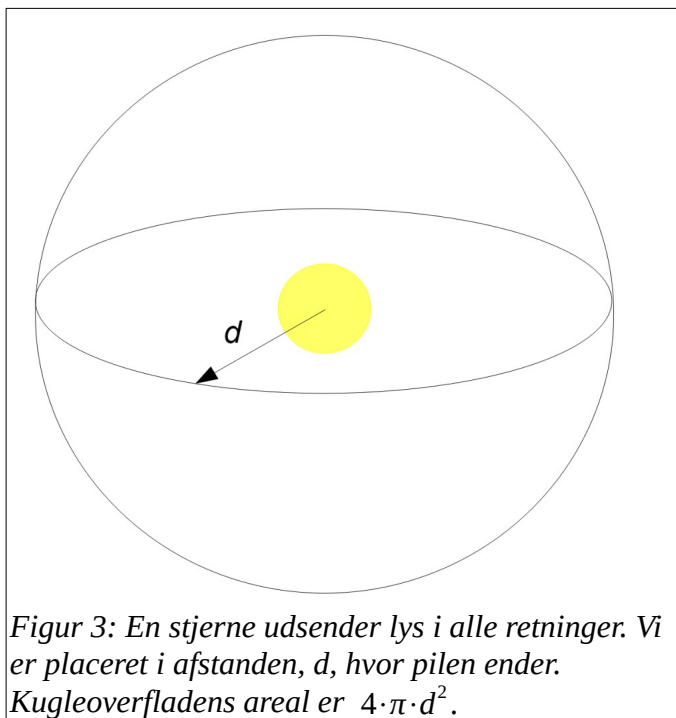
$$m_1 = -2,5 \cdot \log(f_1) = -2,5 \cdot \log(35671) = -11,38$$

$$m_2 = -2,5 \cdot \log(f_2) = -2,5 \cdot \log(40982) = -11,53.$$

$$\delta m = -11,53 - (-11,38) = \underline{0,15}.$$

En observatør på et andet observatorium vil måle forskellige m_1 - og m_2 -værdier, men forskellen, δm , vil være den samme.

Vi skal altså have data fra mindst to stjerner, når vi vil finde δm , og den stjerne vi sammenligner med, skal være en meget lysstabil stjerne, dvs. den må ikke pulsere. I praksis måler man flere referencestjerner, for at være sikker på, at i hvert fald én af de målte stjerner sender et konstant signal.



Figur 3: En stjerne udsender lys i alle retninger. Vi er placeret i afstanden, d , hvor pilen ender. Kugleoverfladens areal er $4 \cdot \pi \cdot d^2$.

2.2 Spektre

En nyttig måde at hente information fra lys på, er ved at sende lyset gennem et optisk gitter, et prisme eller en kombination heraf – et såkaldt grisme. Vi kender fra fysikken, at hvis man sender lyset gennem et gitter, så vil lysets forskellige bølgelængder diffrakteres (afbøjes) i forskellige retninger, og sammenhængen mellem gitterkonstant, d , bølgelængde, λ , og afbøjet vinkel, φ , er givet ved gitterformlen

$$\sin(\varphi_n) = \frac{n \cdot \lambda}{d}. \quad (3)$$

Altså er det muligt at finde bølgelængderne af det udsendte lys.

Der findes færdige spektroskoper med software, som direkte kan måle og tegne spektret for en. Et eksempel på et sådant spektrum er vist på figur 4.

Spektre kan, som man kan se på figur 4, bruges til at identificere grundstoffer i stjernen (og Jordens atmosfære), men man kan også benytte spektre samt dopplereffekten til at måle stjernens hastighed i retningerne hhv. mod os og væk fra os som funktion af tid. Doppler fandt frem til følgende sammenhæng:

$$v_{\text{radial}} = \frac{\lambda_{\text{målt}} - \lambda_{\text{lab}}}{\lambda_{\text{lab}}} \cdot c. \quad (4)$$

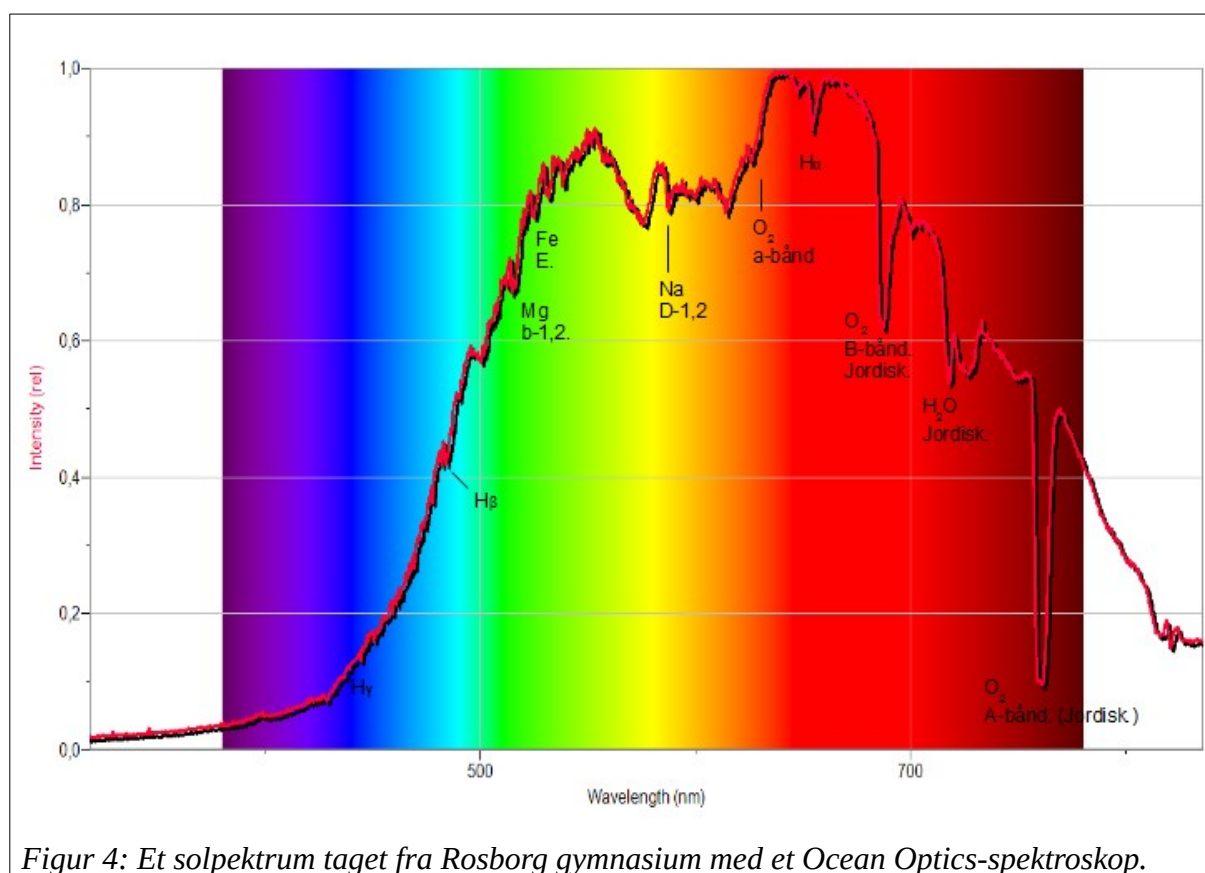
Ovenfor angiver c lysets hastighed, λ_i angiver de målte bølgelængder i laboratoriet eller ude ved kikkerten, og v_{radial} angiver stjernens hastighed væk fra os. (Hvis $v_{\text{radial}} < 0$ bevæger stjernen sig imod os.)

2.2.1 Eksempel

Brint har i luft en spektrallinje på 656,28 nm. (I vakuum er bølgelængden 656,46 nm). En observatør finder denne linje i et målt stjernespektrum og aflæser bølgelængden til 656,5 nm. Dermed må stjernens hastighed i observationsøjeblikket væk fra observatøren være:

$$v_{\text{radial}} = \frac{656,5 - 656,28}{656,28} \cdot 2,99792458 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 100 \frac{\text{km}}{\text{s}}.$$

Ovenstående hastighed er ikke stjernens faktiske hastighed gennem verdensrummet, for vi kan med denne metode kun måle den del af hastigheden, der går i synslinjens retning. Man skal også huske på, at Jorden bevæger sig ca. 30 km/s i sin bane omkring Solen, og at Solen heller ikke står stille.



Figur 4: Et solpektrum taget fra Rosborg gymnasium med et Ocean Optics-spektroskop.

Vi er altså i stand til måle hastigheder af stjerner samt måle lyskurver for stjerner. Dette er sammen med nogle passende matematiske modeller nok til at få bestemt masse og radius samt banehældningen (kaldes også *inklinationen*) af en usynlig exoplanet. Nedenfor starter vi med at lave en model, hvor en stjernes radialhastighedsdata kan bruges til at veje en exoplanet.

3 Planetbevægelsesmodeller

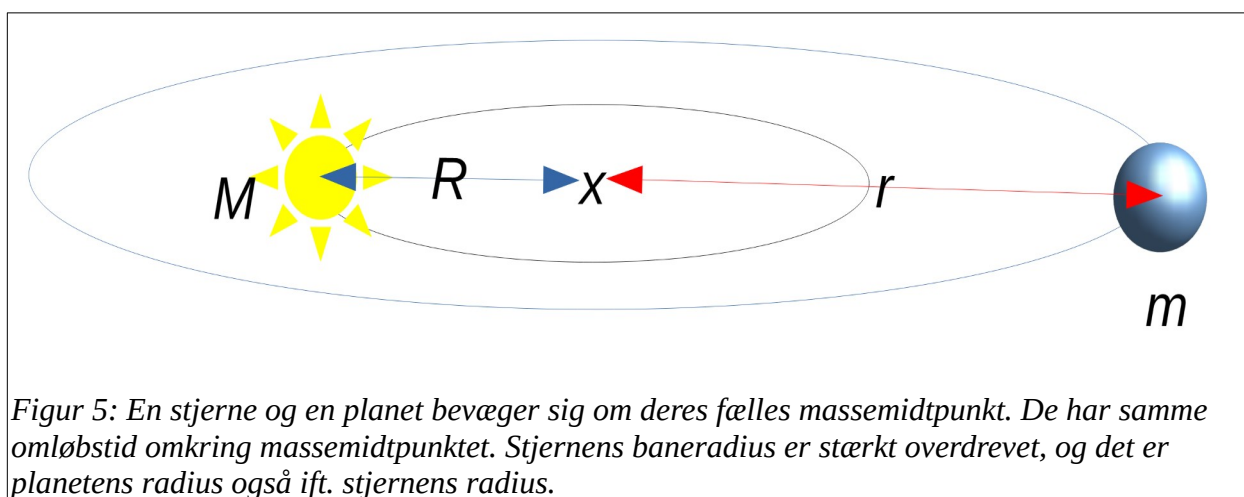
3.1 Radialhastighedsmetoden – cirkulær bane

Ved hjælp af dopplereffekten vil vi udlede en formel til at bestemme massen af en planet, som vi ikke direkte kan observere.

Betragt figur 5. Mellem stjernen med massen M , og massemidtpunktet, x , er der afstanden R . Mellem planeten med massen m og massemidtpunktet er der afstanden r .

Man kan vise følgende relation, som kaldes vægtstangsreglen

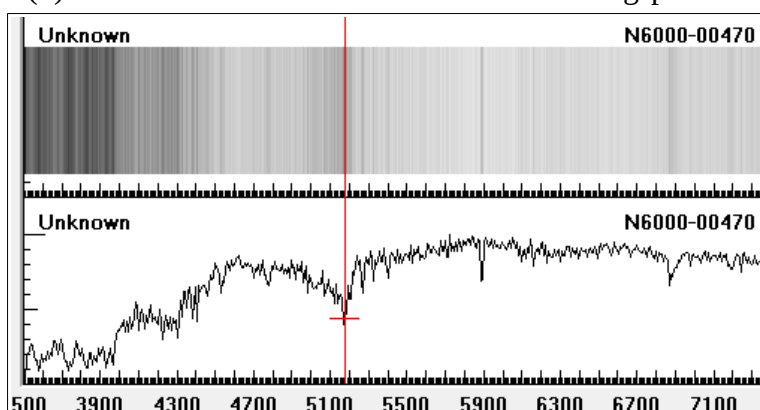
$$m \cdot r = M \cdot R \quad (5)$$



Hvis du har haft vektorregning, kan du vise (5), hvis du anvender definitionen af massemidtpunktet samt sætter origo for koordinatsystemet i massemidtpunktet. Har du ikke haft vektorregning, må du nøjes med at acceptere (5) uden videre. (5) indeholder den ønskede størrelse – nemlig planetens masse m ; derfor vil vi bruge denne formel. De øvrige størrelser er heller ikke kendt, så vi skal have fundet udtryk for dem, så de kan indsættes i (5). Vi ønsker altså at få målbare størrelser indsat på pladserne for r , M og R .

Dopplers formel blev introduceret ovenfor. Eksempler på spektre er vist i figurerne 4 og 6.

Når man betragter et stjerne/planet-system, betragtes det normalt med en vis vinkel, i , imellem planetbanen og himmelbaggrunden. Se figur 7.

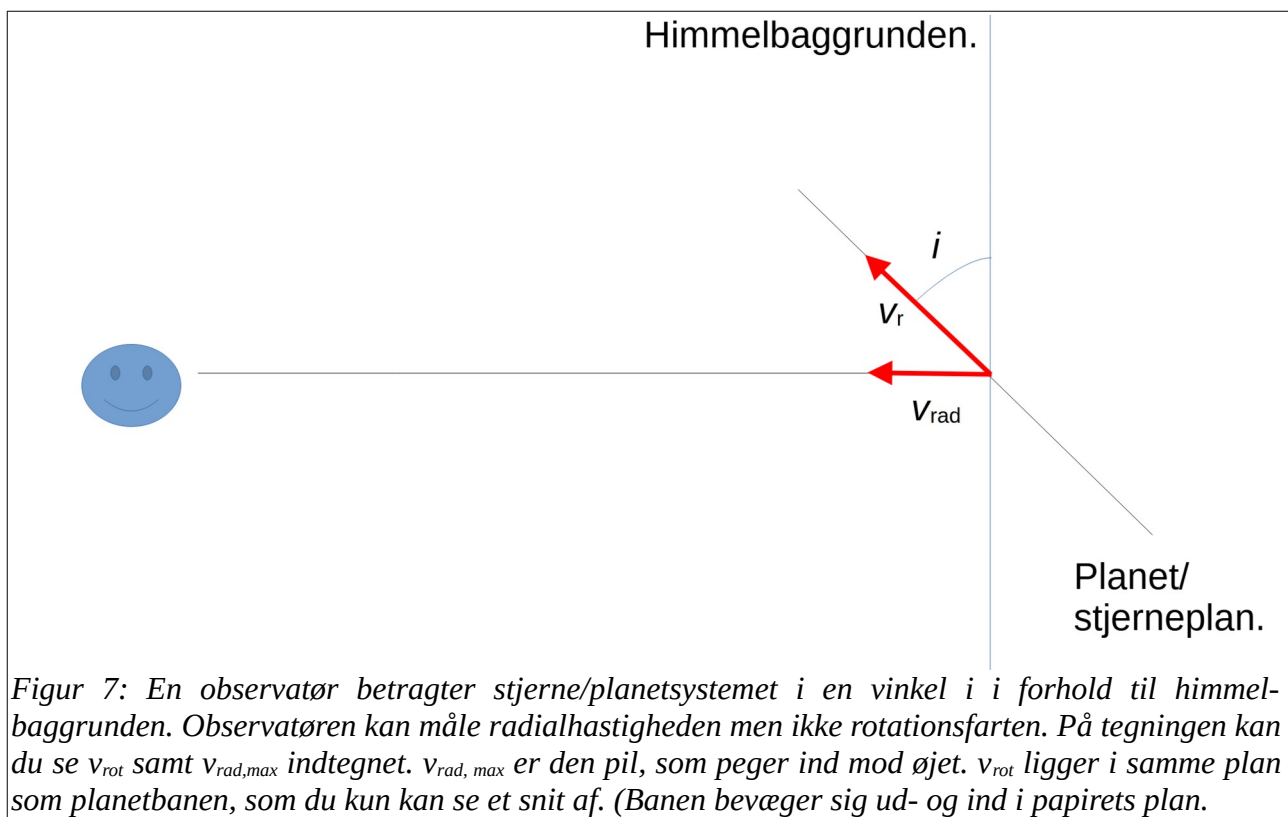


Figur 6: Et spektrum hvor en spektrallinje (absorption) er markeret i enheden Å. Linjen flytter sig fra side til side, når stjernen henholdsvis bevæger sig imod os og -væk fra os. Spektret er målt i Vireo.

Som figuren viser, er der følgende sammenhæng mellem stjernens rotationsfart, v_{rot} , og stjernens maksimale radialhastighed, v_{rad}

$$v_{rot} = \frac{v_{rad}^{max}}{\sin(i)} \quad (6)$$

Spektrallinjernes varierer til forskellige tidspunkter, da stjernens hastighed med tiden ændrer retning i forhold til os. Den roterer nemlig rundt omkring systemets fælles massemidtpunkt. For eksempel er $v_{rad} = 0$, når stjernen bevæger sig vinkelret på synslinjen til os, men den er ikke 0 ved andre situationer. Derfor får man en sinusformet graf, som er vist på figur 8. På figuren kan man aflæse den største radialhastighed som amplituden, og man kan aflæse stjernens (eller planetens) omløbstid på 1. akse.



Hvis inklinationen (betragtningvinklen) i er kendt, kan man altså bestemme stjernens rotationsfart. Rotationsfarten indgår jo ikke i (5), men vi kan udtrykke R ved rotationsfarten og dermed bortsubstituere R . Vi antager, at planeten og stjernen bevæger sig i cirkelbaner omkring massemidtpunktet, og derfor gælder følgende sammenhæng

$$v_{rot}^{stjerne} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}.$$

Indsætter vi ovenstående udtryk i (5) får vi

$$m \cdot r = \frac{T \cdot v_{rot}^{stjerne}}{2 \cdot \pi} \cdot M \quad (7)$$

I (7) har vi altså et udtryk, hvor stjernens rotationsfart indgår. Den kan relateres til radialhastigheden ved hjælp af (6).

Planetens afstand til stjernen indgår også i (7), så vi skal have den erstattet af noget målbart. Til dette kan vi bruge Keplers 3. lov på den form, som den står i noten *Solsystemet og livsbetingelser*:

$$\frac{\left(\frac{r}{\text{AU}}\right)^3}{\left(\frac{T}{\text{yr}}\right)^2} = \frac{M_{\text{stjerne}} + m_{\text{planet}}}{M_{\text{Sol}}} \simeq \frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{Sol}}} \Rightarrow$$

$$r = \left(\frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{Sol}}} \cdot \left(\frac{T}{\text{yr}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \text{AU}. \quad (8)$$

Nu kan vi endelig sammenfatte (6), (7) og (8), og vi får:

$$m = \frac{v_{\text{rad}}^{\text{max}} \cdot T \cdot M_{\text{stjerne}}}{2 \cdot \pi \cdot \sin(i) \cdot \left(\frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{Sol}}} \cdot \left(\frac{T}{\text{yr}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}. \quad (9)$$

Hvis vi omregner enhederne for tid til yr og stjernemasse i solmasser i tælleren, får vi:

$$m = \frac{v_{\text{rad}}^{\text{max}} \cdot \frac{T}{\text{yr}} \cdot \frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{Sol}}} \cdot 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 3,156 \cdot 10^7 \text{ s}}{2 \cdot \pi \cdot \sin(i) \cdot \left(\frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{Sol}}} \cdot \left(\frac{T}{\text{yr}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$m = \frac{v_{\text{rad}}^{\text{maks}}}{\sin(i)} \cdot \left(\frac{M_{\text{stjerne}}}{M_{\text{Sol}}} \right)^{2/3} \cdot \left(\frac{T}{\text{yr}} \right)^{1/3} \cdot 6,678 \cdot 10^{25} \frac{\text{kg} \cdot \text{s}}{\text{m}} \quad (10)$$

Dermed er vi klar til et par eksempler.

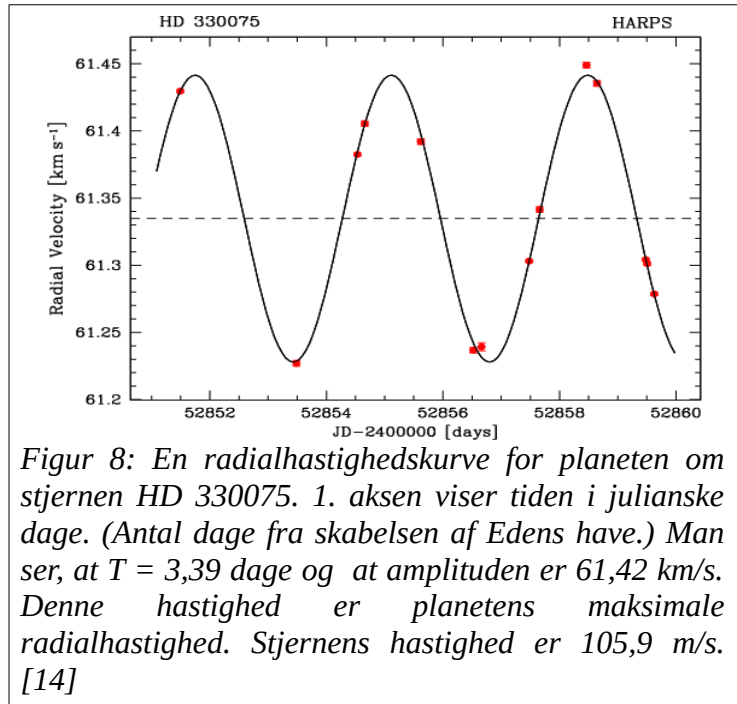
3.1.1 Eksempel - Stjernen 51 Pegasi

Den første exoplanet man fandt var omkring 51 Pegasi. Man målte følgende $T = 4,23$ døgn.

$M = 1 M_{\text{Sol}}$. (Denne størrelse blev bestemt ved at finde ud af stjernens spektraltype.)

$v_{\text{rad, max}} = 56,1 \text{ m/s}$.

i er ukendt.



Figur 8: En radialhastighedskurve for planeten om stjernen HD 330075. 1. akse viser tiden i julianske dage. (Antal dage fra skabelsen af Edens have.) Man ser, at $T = 3,39$ dage og at amplituden er $61,42 \text{ km/s}$. Denne hastighed er planetens maksimale radialhastighed. Stjernens hastighed er $105,9 \text{ m/s}$. [14]

Tallene sættes ind i (10)

$$m = \frac{56,1 \text{ m/s}}{\sin(i)} \cdot \left(\frac{4,23 \text{ d}}{365,256 \text{ d}} \right)^{1/3} \cdot 6,678 \cdot 10^{25} \text{ kg} \cdot \text{s/m} = \frac{8,48 \cdot 10^{26} \text{ kg}}{\sin(i)}$$

Ovenstående masse er 40 % af Jupiters masse såfremt $\sin(i) = 1$, dvs. $i = 90^\circ$. Men det er den jo nok ikke, for hvorfor skulle vi lige præcis betragte stjernesystemet fra den vinkel?

Pt. kan vi ikke bestemme i , så vi ved faktisk ikke, hvad den pågældende planet vejer.

3.1.2 Eksempel - HD330075

For stjernen med katalognummeret HD330075 er følgende målt

$$T = 3,39^{\text{d}}$$

$$v_{\text{rad, max}} = 105,9 \text{ m/s.}$$

$$M = 0,7 \pm 0,1 M_{\text{sol.}}$$

i er ukendt.

Indsætning af tal i (10) giver

$$m = \frac{105,9 \text{ m/s}}{\sin(i)} \cdot 0,7^{2/3} \cdot \left(\frac{3,39 \text{ d}}{365,256 \text{ d}} \right)^{1/3} \cdot 6,678 \cdot 10^{25} \text{ kg} \cdot \text{s/m} = \frac{1,17 \cdot 10^{27} \text{ kg}}{\sin(i)} = \frac{0,62 \cdot M_{\text{Jupiter}}}{\sin(i)}$$

Planeten er 0,039 AU fra stjernen. Til sammenligning er Merkur 0,3871 AU fra Solen.

3.1.3 Opgave - Prox Cen b

Målte data er for stjernen Proxima Cen er

$$T = 11,1868^{\text{d}}$$

$$v_{\text{rad, max}} = 1,24 \text{ m/s.}$$

$$M = 0,1221 M_{\text{sol.}}$$

i er ukendt.

Beregn planetens masse. Beregn også, ved hjælp af Keplers 3. lov, planetbanens halve storakse.

3.1.4 Opgave - Kepler-20 b

Målte data er for stjernen Kepler-20 b (eller KOI-70 b) er

$$T = 3,6961219^{\text{d}}$$

$$v_{\text{rad, max}} = 3,7 \text{ m/s.}$$

$$M = 0,912 M_{\text{sol.}}$$

$$i = 86,5^\circ.$$

Beregn planetens masse. Beregn også, ved hjælp af Keplers 3. lov, planetbanens halve storakse.

3.2 Radialhastighedsmetoden for ellipsebane – svært

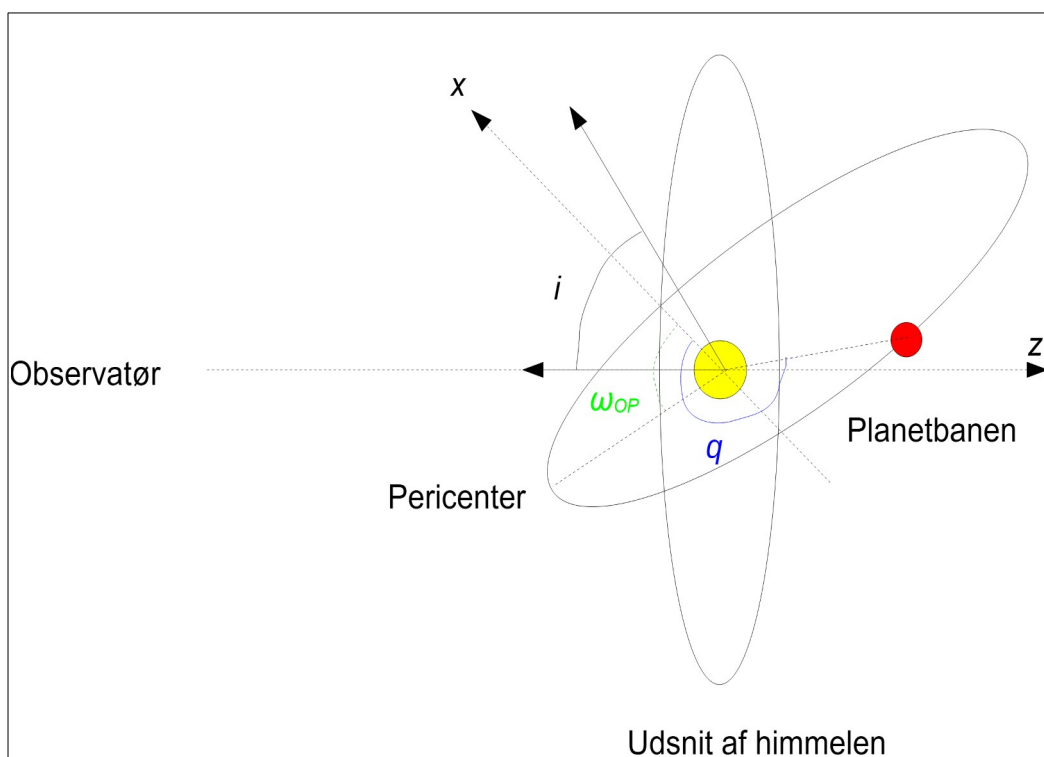
(10) gjaldt jo kun for baner, der var cirkulære. I virkeligheden er banerne oftest ellipseformede, og derfor skal man for det generelle tilfælde bruge en anden formel. Den vil vi ikke udlede, da matematikken er ret uoverkommelig. Derfor postuleres den uden videre begrundelse nedenfor. Man skal bruge formlen til at lave en parametertilpasning til målte data, og det er en kompliceret opgave, så det må vente til universitetsstudierne eller evt. en SRP-opgave for den særligt interesserede elev.

Betragt figur 9 på næste side. Den viser en planetbane, som er ellipseformet, og banens storakse ligger tilfældigt anbragt i rummet. Banen har en inklinationsvinkel, i , med himmelplanet. Den sande anomal, θ , angiver planetens placering i sin bane.

Vi betragter altså det generelle tilfælde for en planetbane, såfremt den bevæger sig i en ellipsebane. Dette er en god antagelse, såfremt gravitationspåvirkningen fra eventuelle naboplaneter er nul. Hvis naboplaneter påvirker planetbanen, skal man ty til såkaldte numeriske Nbody-simuleringer, hvilket er en indviklet disciplin.

Bemærk, at vi oftest slet ikke kan se ellipsebanen eller *refleksbanen*, som den også kaldes – ikke engang med de største kikkerter i verden. Vi har derimod lavet en matematisk *model* af virkeligheden, og modellen indeholder flere parametre, som man kan manipulere med, indtil modellen giver resultater, der passer med analysen af det lys, vi modtager fra systemet.

Man kan vise, at planetbanens form, kaldet *eccentriciteten*, e , er den samme som stjernens ellipseform. Ellipseformen anføres ved tallet $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, hvor b er banens lilleakse, og a er banens storakse. Hvis $e = 0$ er banen en cirkel, og jo større e bliver, des mere ellipseformet bliver banen. Eccentriciteten kan maksimalt have værdien 1, som svarer til en uendelig aflang bane.



Figur 9: Planeten viser en ellipsebane. z-aksen er langs synslinjen. x-aksen ligger vinkelret på z-aksen og den ligger i himmelens plan. (Den går egentligt vinkelret ind i papiret.) Den er defineret som skæringslinjen mellem himmelen og planetbanen. θ er planetens sande anomal, dvs. den vinkel, der måles fra x-aksen og til planetens position. ω_{OP} angiver vinklen mellem x-aksen og planetens nærmeste afstand til sin stjerne. Det punkt kaldes pericenteret. På tegningen er inklinationsvinklen, i , indtegnet som vinklen mellem normalvektoren til banen og normalvektoren til himmelbaggrunden. Det er den samme vinkel som anført i figur 7.

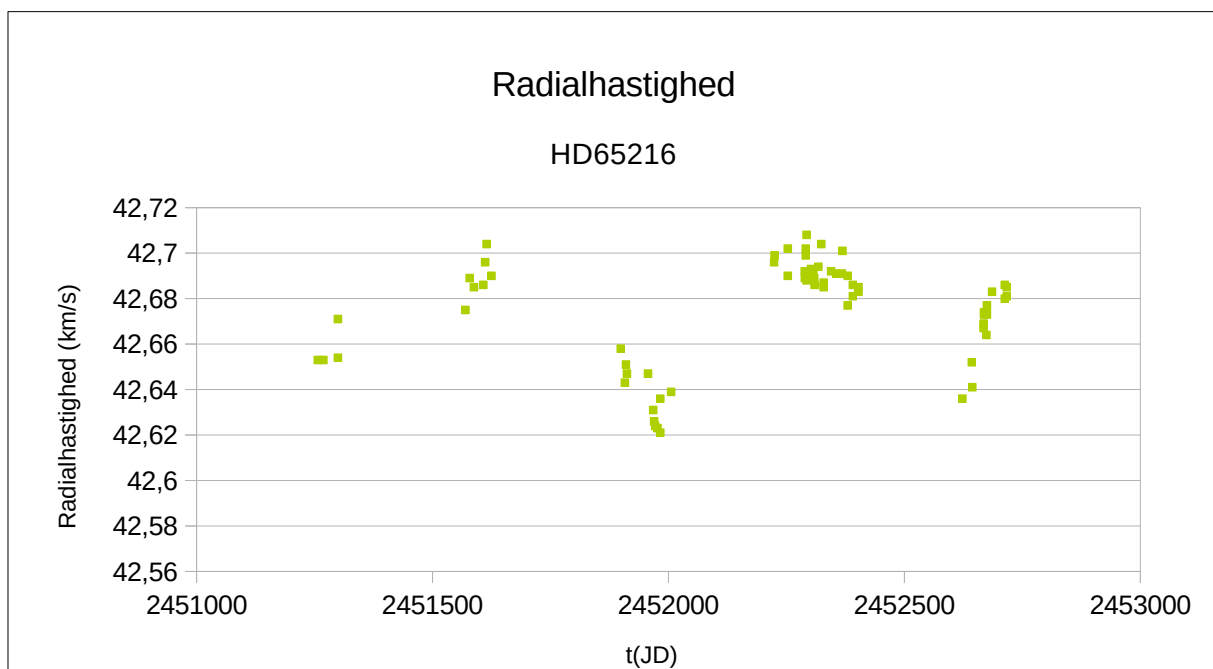
Astronomer har på baggrund af tegningen ovenfor udledt en formel til at bestemme planetmassen, og den formel er

$$v(t) = v_{0,z} + \frac{2 \cdot \pi \cdot a \cdot m \cdot \sin(i)}{(m+M) \cdot T \cdot \sqrt{1-e^2}} \cdot [\cos(\theta(t) + \omega_{0P}) + e \cdot \cos(\omega_{0P})]. \quad (11)$$

Ovenfor er stjernens radialhastighed, v , a er planetens halve storakse, T er planetens omløbstid, m er planetens masse, og de andre størrelser er defineret i teksten til figur 9.

Den ret indviklede formel er delt ind i flere dele. $v_{0,z}$ er stjernens almindelige hastighed væk fra/imod Jorden. (Fordi både Jord, Sol og stjerne bevæger sig.) Det næste led er den del af stjernens hastighed, der skyldes planetens trækken i den. Vi ser, at det er en harmonisk svingning, og den består af parametrene a , m , T , e , ω_{0P} , $\sin(i)$ og M . M kan astrofysikere levere, resten skal vi finde ud fra en serie $(t, v(t))$ -målinger.

Den sande anomali, $\theta(t)$, er svær at finde direkte, men man kan beregne den såkaldte middelanomali ved at kende perioden og eccentriciteten af banen. Derefter kan den sande anomali beregnes. Det næste problem opstår, når man skal tilpasse formlen til måledataene – der er mange parametre, og så viser et kompliceret problem sig, nemlig at der kan være mere end 1 løsning på tilpasningen! Det er jo problematisk, da man dermed ikke ved, hvilken løsning, der er den korrekte.



Figur 10: En radialhastighedskurve for stjernen HD 65216. Bemærk at formen af kurven ikke længere er en pæn sinuskurve, men den er dog periodisk. Analysen af grafen giver $P = 613$ dage, $e = 0,41$. $a = 1,37$ AU, $m \sin(i) = 1,21$ MJupiter. Stjernen vejer 0,92 solmasser og det er en G5V-stjerne, hvilket svarer til at stjernen har en effektiv temperatur på 5666 K. [6]

Det vi kan gøre, er, at aflæse amplituden og perioden på vores graf – men de oplysninger, der er gemt i selve *formen* af grafen, kræver en nøjere analyse. Formen af grafen giver eccentriciteten, e , og den er altså umulig at udregne analytisk. Derfor må vi få den oplyst af andre eller foretage en numerisk analyse ved hjælp af computerprogrammer.

3.3 Numerisk analyse af radialhastighedskurver

Sreekumar Thaithara Balan & Ofer Lahav har skrevet et computerprogram, *Exofit*, der kan anvendes til at analysere komplicerede radialhastighedskurver. Man kan downloade programmet på linket i kilde [9]. Programmet er skrevet i et såkaldt kildetekstformat, dvs. det er skrevet i C++, og det skal oversættes til et computersprog, ens computer kan forstå. Har man en linux-maskine bør programmet kunne installeres på sædvanlig vis. Har man en PC, kan man installere linux-systemet *Cygwin* på sin pc. Bemærk at programmet kræver at pakken *gsl* samt statistik-pakken "*R*" er installeret. *Gsl* findes også i Windows-version, men den virker tilsyneladende ikke ordentligt, så Windows-brugere slipper nok ikke for at installere *Cygwin*. Indefra *Cygwin* kan man oversætte programmet til et almindeligt eksekvertbart-program, der kan køres fra en kommandoprompt. *Cygwin* kan downloades via linket i kilde [10].

3.3.1 Kørsel af programmet Exofit for PC-brugere

Man skal lave en mappe på sin PC, hvor *exofit.exe* skal ligge. I det følgende antages, at denne mappe er døbt *radialhastighed*. Ligeledes skal systemet vide hvor filen *cygblas-0.dll* er anbragt. (Kopier den f.eks. fra Exoplaneter.zip-arkivet, som findes på astro-gym.dk ind i din system32-mappe.)

I mappen *radialhastighed* skal *exofit.exe* naturligvis ligge, men derudover skal man også lægge en tekst-fil med radialhastighedsdataene. Disse data skal være *punktumseparerede*. Normalt bruger man i Danmark komma til at separere decimaler, men programmet kræver den engelske konvention. Hvis man har en hastighed på f. eks. 760,4 m/s skal der altså stå 760.4 i filen. Formen på filen skal være en søjle med observationsdagen og enheden skal være i dage, en søjle med hastighederne, hvor enheden skal være m/s, og endelig en søjle med usikkerheden på hastighederne, som ligeledes skal være i enheden m/s.

Det er også en god ide at have *R*-filen *orbit_plot.R* i samme mappe, så alt er samlet, når man skal lave statistik på parametrene.

I mappen kan man også lægge filen *state.dat*. I den kan man variere de intervaller, som programmet leder efter parametre i. Se mere i dokumentationen til *Exofit*. [9].

Man kører programmet ved at åbne en kommandoprompt (Tryk på *Søg* nederst på skærmen og skriv *cmd* og tryk på *ENTER*). Flyt hen til mappen med *program+data*. (For eksempel kan man skrive *cd c:\radialhastighed*, hvis det er der, man har oprettet mappen.) Endelig skriver man *exofit DATAFIL* hvor *DATAFIL* skal være navnet på den tekstfil, hvori radialhastighederne er anført. Dernæst ventes et stykke tid. På en 2,26 GHz Core2-processor tager en kørsel typisk ca. 30 minutter, såfremt man kører med 50 % cpu-reservation til processen. (Ved kun at køre med 50 % belastning kan maskinen også bruges til andre formål, mens der regnes.)

Når *exofit* er færdig med at søge efter parametre, skal kvaliteten af de fundne værdier undersøges. Til dette har forfatterne skrevet et script, der hedder *orbit_plot.R*. Dette script virker kun i det statistikprogram, der hedder *R*. Programmet er gratis, og det kan downloades via linket i kilde [11]. Programmet findes til både Linux, Windows og Mac. Anvendelsen af programmet kan du læse mere om i kilde [9].

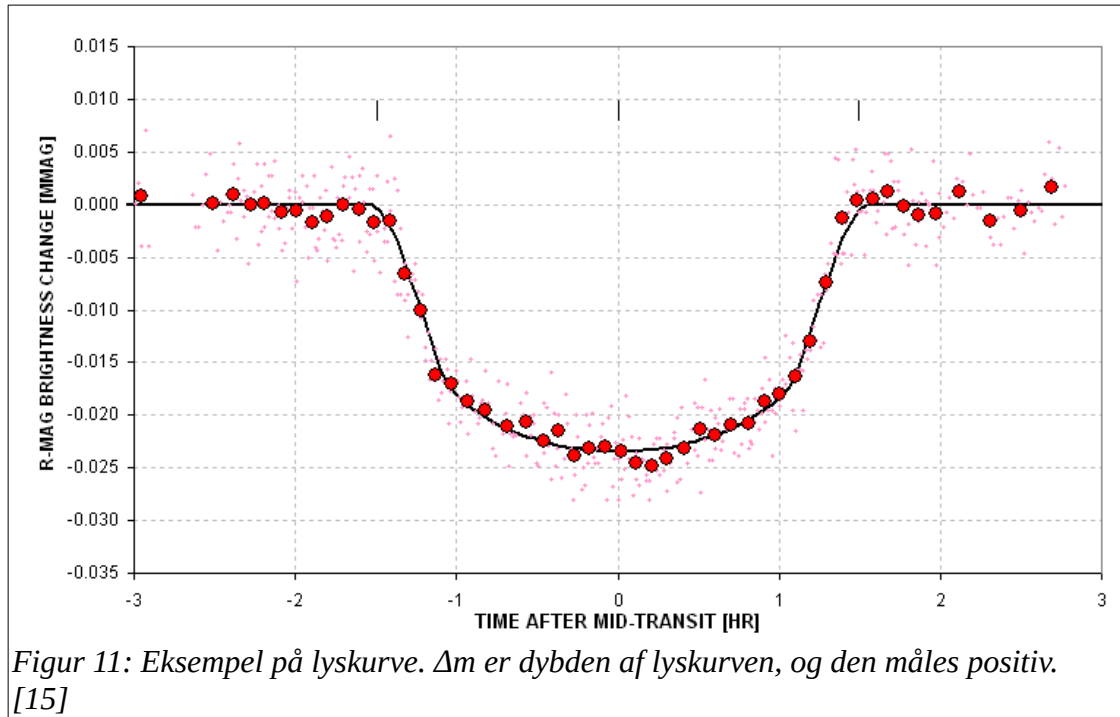
4 Transitmetoden

Ved at måle fluxen/luminositeten af en stjerne, som funktion af tiden, kan man finde ud af om der kredser en planet rundt om den, såfremt planeten skygger for stjernens lys, når den kredser om

stjernen. Man kan også anvende kurven til at bestemme planetbanens inklinations samt dens radius. Lyskurver er altså meget nyttige kilder til at få information om exoplaneter.

Man skal normalt tage højde for atmosfærens spredning/absorption af lys, og det gør vi ved at sammenligne stjernes luminositet med flere referencestjerner.

En lyskurve er altså en $(t, \delta m)$ -graf, hvor $\delta m = m_{\text{instrument}} - m_{\text{reference}}$. Et eksempel på en sådan kurve er vist på figur 11.



4.1 Planetens radius i forhold til stjernens radius

Når stjernens lys ikke delvist spærres af planeten, udsendes i gennemsnit fluxen F fra overfladen af stjernen, som har luminositeten, L . I transitten, altså når planeten dækker for lidt af stjernens lys, udsendes i gennemsnit fluxen F_t . Vi måler pixeltal, f_i , der er proportionale med både F og F_t . Herunder sammenkædes de to målte størrelser med planetens- og stjernens radier. A_i er tværsnitsarealet af hhv. stjerneskenen og planetskenen set fra os.

$$\Delta F_{\text{rel}} = \frac{F - F_t}{F} = 1 - \frac{f_t}{f} = 1 - \frac{k \cdot F \cdot (A_{\text{stjerne}} - A_{\text{planet}})}{k \cdot F \cdot A_{\text{stjerne}}} = 1 - \frac{A_{\text{stjerne}} - A_{\text{planet}}}{A_{\text{stjerne}}} = \frac{A_{\text{planet}}}{A_{\text{stjerne}}} = \frac{\pi \cdot R_{\text{planet}}^2}{\pi \cdot R_{\text{stjerne}}^2} \Rightarrow$$

$$\Delta F_{\text{rel}} = \left(\frac{R_{\text{planet}}}{R_{\text{stjerne}}} \right)^2 \Rightarrow \quad (12)$$

$$\frac{R_{\text{planet}}}{R_{\text{stjerne}}} = \sqrt{\Delta F_{\text{rel}}} \quad (13)$$

Ovenfor har vi set bort fra randformørkning af stjernen, dvs. vi har antaget, at stjernens overfladeintensitet er konstant over hele dens overflade.

4.1.1 Radiusbestemmelse udfra størrelsesklasser

Man kan også udtrykke (13) ved størrelsesklasser.

Nedenfor angiver α den brøkdel af stjernens sande flux, som opfanges af observatoriet. Eftersom referencestjernen og stjernen med planeten er optaget på nøjagtigt samme tidspunkt og i ca. samme højde over horisonten, må α være ens for de to stjerner. Udtrykt i instrumentstørrelsesklasser, m_i , fås

$$\begin{aligned}
 m_{stjerne} &= -2,5 \cdot \log(f_{stjerne}) \wedge m_{ref} = -2,5 \cdot \log(f_{ref}) \wedge f_i = F_i \cdot \alpha \Leftrightarrow \\
 \delta m_{stjerne} &= m_{stjerne} - m_{ref} = -2,5 \cdot \log(f_{stjerne}) - (-2,5 \cdot \log(f_{ref})) = -2,5 \cdot \log\left(\frac{f_{stjerne}}{f_{ref}}\right) \Leftrightarrow \\
 \delta m_{stjerne} &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{stjerne} \cdot \alpha}{F_{ref} \cdot \alpha}\right) \Rightarrow \\
 \delta m_{stjerne} &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{stjerne}}{F_{ref}}\right). \tag{14}
 \end{aligned}$$

Tilsvarende udtryk kan skrives op, når man på et andet tidspunkt observerer stjernen, når planeten er i transit. Her vil jordatmosfæren pga. skiftende atmosfæreforhold mv. tillade en anden brøkdel, β , af lyset at passere, men β vil stadigvæk være ens for de to stjerner. Dvs.

$$\begin{aligned}
 \delta m_{transit} &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{transit} \cdot \beta}{F_{ref} \cdot \beta}\right) = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{transit}}{F_{ref}}\right) \wedge \delta m_{stjerne} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{stjerne}}{F_{ref}}\right) \Leftrightarrow \\
 \Delta m &= \delta m_{transit} - \delta m_{stjerne} = -2,5 \cdot \left(\log\left(\frac{F_{transit}}{F_{ref}}\right) - \log\left(\frac{F_{stjerne}}{F_{ref}}\right)\right) = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{transit} / F_{ref}}{F_{stjerne} / F_{ref}}\right) \Leftrightarrow \\
 \Delta m &= \delta m_{transit} - \delta m_{stjerne} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{transit}}{F_{stjerne}}\right) \wedge 1 - \frac{F_{transit}}{F_{stjerne}} = \left(\frac{R_{planet}}{R_{stjerne}}\right)^2 \Leftrightarrow \\
 10^{\frac{-\Delta m}{2,5}} &= \frac{F_{transit}}{F_{stjerne}} \wedge 1 - \frac{F_{transit}}{F_{stjerne}} = \left(\frac{R_{planet}}{R_{stjerne}}\right)^2 \Leftrightarrow \\
 \frac{R_{planet}}{R_{stjerne}} &= \sqrt{1 - 10^{\frac{-\Delta m}{2,5}}}. \tag{15}
 \end{aligned}$$

Man kan altså sammenfatte ovenstående som følger: Man måler den maksimale dybde, Δm , af lyskurven, talværdien er positiv. Derefter indsættes i formlen ovenfor, og hvis man kender stjernens radius – den kan vi tit slå op - har man altså fundet radius af planeten, og det selvom planeten er usynlig for os.

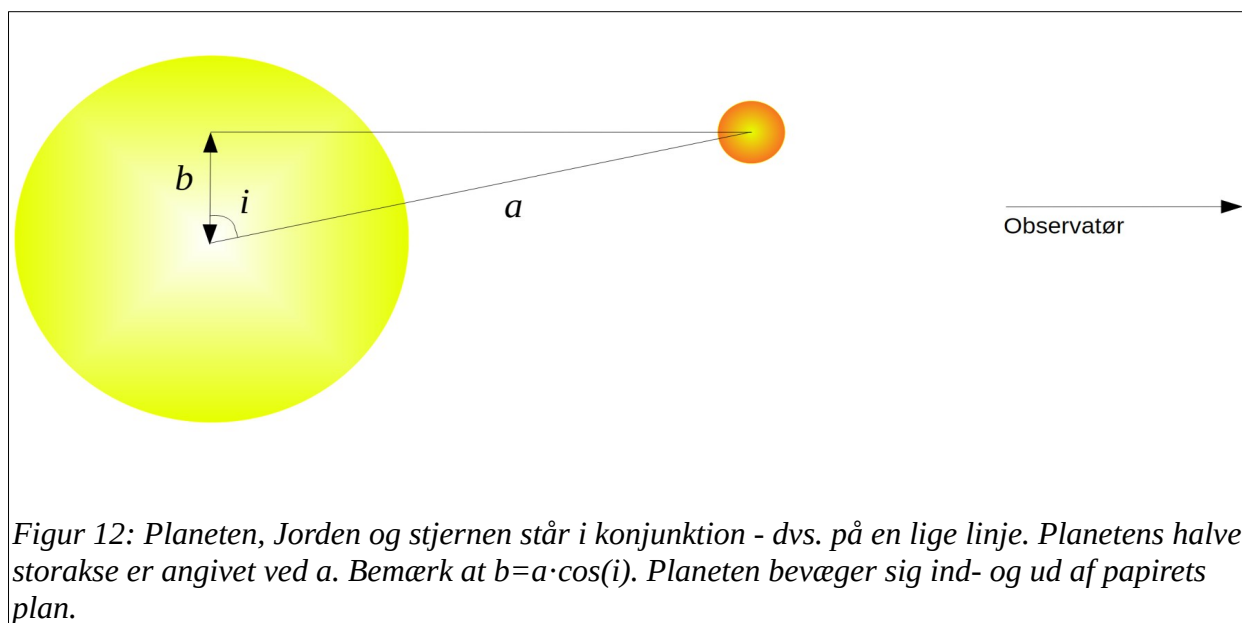
4.2 Planetbanens inklinations

En planetbane hælder oftest i forhold til himmelbaggrunden. Vinklen mellem himmelbaggrunden og planetens bane kaldes, som nævnt i afsnit 3.1, for inklinationen, i . Det er ganske vigtigt at finde inklinationen, da man ellers ikke kan bestemme planetens masse.

Eftersom planetradius og -masse er fundamentale egenskaber ved en planet, vil vi opstille en model for banen og kæde modellen sammen med observationsdata.

Betragt figur 12. Den orange farvede planet kredser i en ellipsebane om sin stjerne, og banens halve storakse er betegnet med bogstavet a . Planetbanen er en ellipse, der går ind og ud af papirets plan. Hvis inklinationen $i = 90^\circ$ vil planeten bevæge sig på en ellipse, der er sammenfaldende med synsretningen for observatøren. Når i er forskellig fra 90° vil synslinjen være sammenfaldende med en linje, der ikke skærer i stjernens centrum. Afstanden fra centrum er på tegningen navngivet b og den kaldes *stødparameteren*.

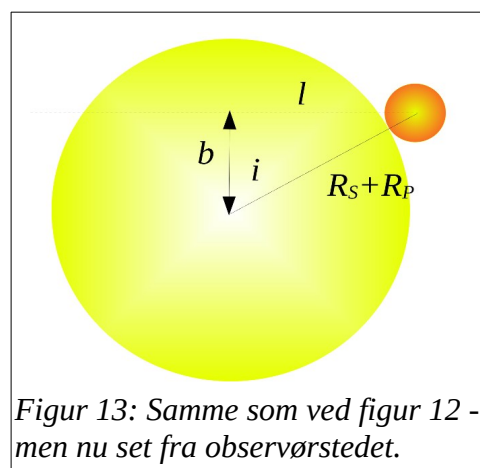
Modellen på figur 12 ser anderledes ud fra observatørens position. Dette er forsøgt vist på figur 13.



Af figur 13 kan man se, at det for observatøren ser ud som om, at planeten i transittiden bevæger sig $2 \cdot l$ henover skiven. Denne transittid kan vi i øvrigt måle på lyskurven som tidsrummet fra starten af dykket til slutningen af dykket. Af tegningen kan vi beregne l ved hjælp af Pythagoras' sætning. Vi får

$$b = a \cdot \cos(i) \wedge b^2 + l^2 = (R_s + R_p)^2 \Leftrightarrow$$

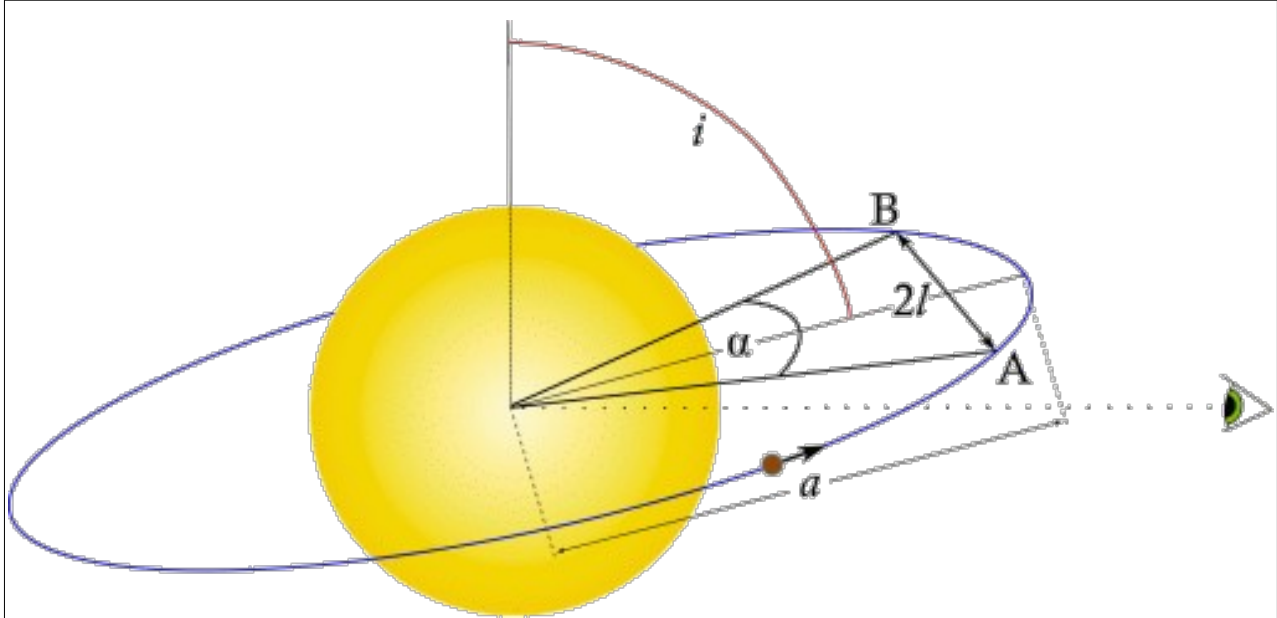
$$\sqrt{(R_s + R_p)^2 - (a \cdot \cos(i))^2} = l.$$



Betragt figur 14. Figuren viser igen planetbanen om stjernen, men nu er den forsøgt perspektivisk tegnet. Man ser, at følgende relation må gælde: $\frac{\alpha}{2 \cdot \pi} = \frac{T}{P}$, hvor T er transittiden, P er planetens omløbstid og α brøkdelen af den vinkel, som planeten krydser af sin tilsyneladende bane henover stjernen. Der er antaget jævn cirkelbevægelse. Der er dog fundet adskillige exoplaneter, som slet ikke bevæger sig i cirkelbaner. Hvis man ved hjælp af radialhastighedsmetoden, kan finde

baneparametrene for planetbanen, kan man anvende Keplers 2. lov til at justere i formen ovenfor. Det udsætter vi dog til en anden gang.

Betragt atter figur 14. Her ser man, at



Figur 14: α er den vinkel, som planeten bevæger sig i transittiden. Planeten bevæger sig fra A til B, og observatøren ser den projicerede bevægelse markeret som $2 \cdot l$. [4], [16]

$$\begin{aligned}
 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{l}{a} = \frac{\sqrt{(R_{\text{stjerne}} + R_{\text{planet}})^2 - a^2 \cdot \cos^2(i)}}{a} \Leftrightarrow \\
 \sin\left(\frac{\pi \cdot T}{P}\right) &= \frac{\sqrt{(R_{\text{stjerne}} + R_{\text{planet}})^2 - a^2 \cdot \cos^2(i)}}{a} \Rightarrow \\
 \sin^2\left(\frac{\pi \cdot T}{P}\right) &= \frac{(R_{\text{stjerne}} + R_{\text{planet}})^2 - a^2 \cdot \cos^2(i)}{a^2} \Leftrightarrow \\
 \sin^2\left(\frac{\pi \cdot T}{P}\right) &= \frac{(R_{\text{stjerne}} + R_{\text{planet}})^2}{a^2} - \cos^2(i) \Leftrightarrow \\
 \cos^2(i) &= \frac{(R_{\text{stjerne}} + R_{\text{planet}})^2}{a^2} - \sin^2\left(\frac{\pi \cdot T}{P}\right) \Rightarrow \\
 i &= \arccos\left(\pm \sqrt{\frac{(R_{\text{stjerne}} + R_{\text{planet}})^2}{a^2} - \sin^2\left(\frac{\pi \cdot T}{P}\right)}\right). \tag{16}
 \end{aligned}$$

Vi kan måle transittiden, T , som den største bredde af lysdæmpningen på lyskurven, og ved at måle tidsrummet fra en transit til den næste, kan vi finde planetens omløbstid, P .

Ved kendskab til den observerede stjernes masse, M , kan vi bestemme planetbanens halve storakse, a , ved at indsætte i Keplers 3. lov, som er vist i formel (8). Dermed kan man altså bestemme inklinationen, i , ved brug af formel (16).

Planeter og stjernes navne

Stjerner har mange forskellige slags navne – nogle minder om menneskenavne, og andre navne angiver en placering i et stjernekatalog. Planeters navne er altid opkaldt efter stjernes navne – med et bogstav tilføjet. For eksempel har stjernen Qatar-1 en planet, og planetens navn er dermed Qatar-1b. Den først opdagede planet får altid bogstavet 'b' tilføjet stjernens navn. Opdages andre planeter får de tilføjet bogstaverne 'c', 'd' osv.

5 Exoplaneters atmosfærer

Det lyder umiddelbart overmodigt at udtale sig om exoplaneters atmosfærer, når man for langt de flestes tilfælde ikke engang kan se planeten, men atter kan man ved snilde og omhyggelighed alligevel få information om deres atmosfærer. Vi vil starte ud med at regne lidt på planeternes temperaturer.

5.1 Temperaturen af en exoplanet

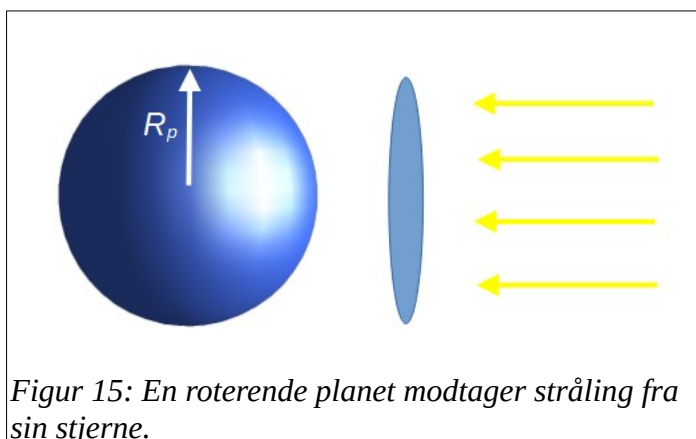
Stefan-Boltzmanns lov lyder som følger: ”Effekten fra et absolut sort legeme med temperaturen T er proportional med temperaturen i 4. potens og proportional med overfladearealet.” I formelsprog ser formelen ud som følger

$$P = A \cdot \sigma \cdot T_{eff}^4, \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4}. \quad (17)$$

Ovenfor måles effekten, P , i W, og A er overfladearealet af legemet.

For eksempel kan vi regne Solens absolutte luminositet, L , (effekt) ud, hvis vi kender Solens samlede overfladeareal A . Overfladearealet af Solen er $A = 4 \cdot \pi \cdot R^2$. Dvs. Solens samlede effekt er $L = 4 \cdot \pi \cdot (6,96 \cdot 10^8 \text{ m})^2 \cdot \sigma \cdot (5800 \text{ K})^4 = 3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}$. Tilsvarende kan man regne den modtagne flux (tilsyneladende luminositet) ved en planet, såfremt man kender afstanden mellem planeten og stjernen.

Hvis vi kan bestemme den flux en planet modtager fra sin stjerne, har vi også mulighed for at bestemme en omtrent værdi for planetens temperatur, såfremt vi ved hvor meget lys planeten reflekterer, og om planeten har en atmosfære eller ej. Betragt atter figur 3. En planets øvre atmosfære modtager fluxen, F , som er givet ved afstandskvadratloven (1).



Figur 15: En roterende planet modtager stråling fra sin stjerne.

Betragt nu figur 15. Den modtagne effekt, som planeten får, er den effekt som skinner igennem tværsnitsarealet af planeten.

Dvs. vi kan skrive planetens modtagne effekt som

$$P = a_{\text{planet}} \cdot F \wedge F = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot d^2} \Leftrightarrow P = \frac{\pi \cdot R_{\text{planet}}^2 \cdot L}{4 \cdot \pi \cdot d^2}.$$

Ovenfor angiver a_{planet} planetens tværsnitsareal. En vis brøkdel, A , af effekten fra stjernen reflekteres – A kaldes for *albedo*en – og derfor absorberes brøkdelen $(1-A)$. Alt i alt absorberer planeten altså effekten

$$P = \frac{(1-A) \cdot R_{\text{planet}}^2 \cdot L}{4 \cdot d^2}. \quad (18)$$

Når planeten modtager lys fra stjernen, opvarmes den, og dermed udstråler den også infrarød stråling til omgivelserne. På et tidspunkt opnås der ligevægt, så den absorberede effekt og den udstrålede effekt bliver ens. Dette er naturligvis et ideelt eksempel, for vi ved jo fra Jorden, at temperaturen et givet sted varierer ganske meget på et døgn samt i løbet af året. Men midlet ud over et år har planeten en bestemt middeludstråling og middeltemperatur.

Hvis en planets atmosfære er betragteligt tykkere end Jordens atmosfære, vil variationerne i temperaturen være mindre – tilsvarende vil en planet uden atmosfære have kraftigere temperaturændringer.

Lad os antage at exoplaneten *har* en atmosfære, som fordeler effekten ud over hele overfladen. Planetens rotation vil også hjælpe med fordelingen af effekten. Dermed vil den udsende varmestråling fra hele sin overflade, dvs. $a = 4 \cdot \pi \cdot R_{\text{planet}}^2$. Altså vil planeten udsende effekten $P = a \cdot \sigma \cdot T_{\text{planet}}^4$. Sættes udtrykket sammen med resultatet i formel 18 fås

$$4 \cdot \pi \cdot R_{\text{planet}}^2 \cdot \sigma \cdot T_{\text{planet}}^4 = \frac{(1-A) \cdot R_{\text{planet}}^2 \cdot L}{4 \cdot d^2} \Leftrightarrow$$

$$T_{\text{planet}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{(1-A) \cdot L}{\sigma \cdot \pi \cdot d^2} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (19)$$

Vi har ovenfor et udtryk for planetens middeltemperatur, såfremt vi kender albedo, A , afstanden mellem stjernen og planeten, d , og såfremt atmosfæren er så tyk og rotationen er så hurtig, at effekten fra stjernen fordeles over hele planeten. L kender vi, da astrofysikere har bestemt den for os.

For at ovenstående beregning giver mening, må man undersøge, om planeten overhovedet har en atmosfære. Vi så på figur 13, hvordan en exoplanet spærre for lidt af stjernens lys, når den bevæger sig ind over stjernens skive. På figuren ser det ud som om planeten har en skarp kant. Men hvis planeten har en atmosfære, er kanten diffus. Ydermere absorberer atmosfæregasser lys forskelligt. For eksempel ved vi fra Jorden, at blå lys spredes mere end de øvrige farver i atmosfæren, og derfor ser vores himmel blå ud. På Mars er det den røde farve, der spredes mest, så der ser himmelen rød ud.

Ligeledes er der bestemte bølgelængder i lyset, der kan anslå atomer i atmosfæren, og disse bestemte farver vil derfor i en lidt større grad blive absorberet i planetatmosfæren end andre farver. Mængden af den absorberede lys for bestemte bølgelængder er *uhyre* lille. For eksempel er den for

den gulorange³ linje i natrium ca. 0,02% af den oprindelige lysdæmpning. [4] Alligevel kan man med rumteleskoper detektere denne lille ændring.

I praksis gør man altså som følger: Først måles en lyskurve, som omtalt i afsnit 2. Derefter gentages proceduren, men hvor man har sat et filter foran detektoren, så den kun tillader lys med et bestemt smalt bølgelængdeinterval at passere. Så sammenligner man de to lyskurver, og hvis de ikke har samme dybde, kan der være fundet en atmosfære. Hvis man har mistanke om, at exoplaneten har en atmosfære, kan man gentage øvelsen med andre filtre, som undersøger for andre grundstoffer. Jupiterlignende exoplaneter har brint i deres atmosfærer, og man har da også detekteret hydrogen ved at måle lyskurver gennem Ly α -filtre. Ly α svarer til bølgelængden 121,5 nm.

Når man har fundet planetens radius bestemt uden filter, og bagefter fundet planetradius bestemt med filteret, kan forskellen mellem de to resultater angives som planetens atmosfæretrykkelse. (Se formel 13 eller 15.)

Ved at måle med flere filtre får man altså også en indikation af, hvilke grundstoffer atmosfæren består af, og så kan man ad den vej anslå planetens albedo, A .

5.2 Flydende vand?

Et fundamentalt spørgsmål man kan stille sig om exoplaneter, er, om de indeholder ilt i deres atmosfærer, og om der er flydende vand til stede. Vi vil undersøge dette spørgsmål nedenfor.

Vi forestiller os, at vi ved hjælp af radialhastigheds- og transitmetoderne har bestemt planetens masse, radius, afstand fra stjernen, at der er en atmosfære, og albedoen er A . Stjernens effekt er også antaget kendt. Spørgsmålet er så, om vi kan forvente mulighed for flydende vand på planeten.

Værdier for Jorden er $A=0,314$, $L=3,846 \cdot 10^{26}$ W, $d=1,496 \cdot 10^{11}$ m. Det giver ved indsættelse i (19) en middeltemperatur på 254 K = -20 °C, hvilket er meget lavere end dens faktiske middeltemperatur, som er + 15 °C. Årsagen til den store forskel på beregnet temperatur og faktisk temperatur er naturligvis, at Jordens atmosfære virker som et drivhus.

Hvis vi vil konkludere om temperaturerne på en exoplanet giver mulighed for flydende vand, er vi altså tvunget til at finde ud af, om planeten har en atmosfære.

5.2.1 Opgave - Qatar-1 b's atmosfære

For planeten Qatar-1b er der detekteret en atmosfære. Opdagerne har antaget, at $A = 0$. Stjernens temperatur $T = 4910$ K og dens radius $R = 5,35 \cdot 10^8$ m. Afstanden til planeten er 0,02342 AU. Det giver, at stjernens absolutte luminositet er $L = 1,35 \cdot 10^{26}$ W. [5], [7].

- Vis på den baggrund at Qatar-1bs temperatur er 1400 K.
- Antag at albedoen svarer til Jupiters, dvs. $A = 0,52$. Beregn T_{planet} .
- Kan denne planet indeholde flydende vand? (Begrund dit svar.)
- Hvis du har løst opgave 7.2 og 7.3 bagest i noten, kan du nu beregne tyngdeaccelerationen på planetens overflade ved at benytte formlen $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$.

3 Farven er den samme, som man ser i orange natrium-gadelamper. Bølgelængderne er 588,995 nm og 589,592 nm.

5.3 En atmosfæremodel med drivhuseffekt

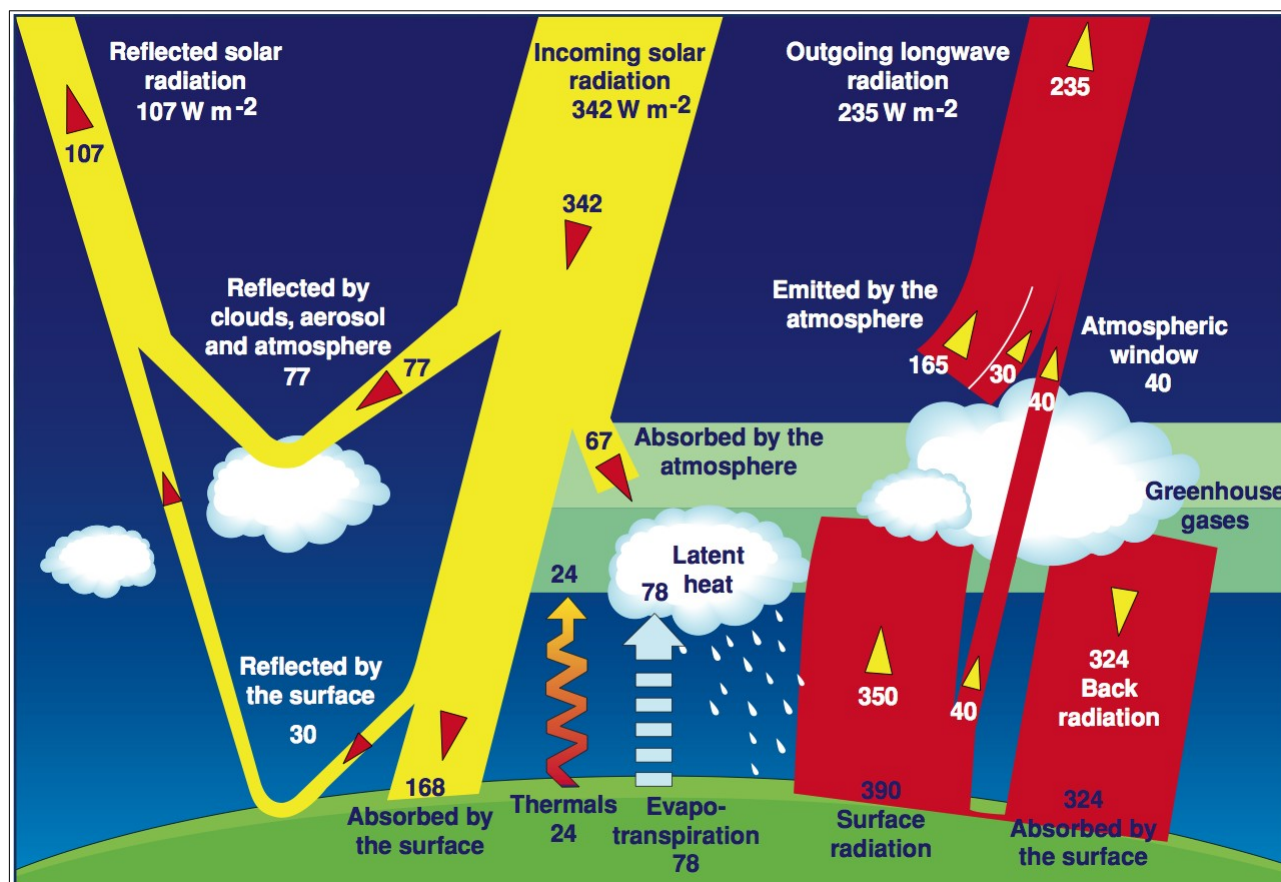
Ovenfor så vi, at formelen for temperaturen af Jorden ikke er særlig god, og det skyldes naturligvis, at vi ikke har taget højde for drivhuseffekten fra atmosfæren. Nedenfor vil vi anvende en model, som er udviklet af Kiehl & Trenberth. [8]. Modellen er ganske simpel, men den forudsiger Jordens overfladetemperatur godt, og selvom den er simpel, er matematikken vist tilstrækkeligt udfordrende for de fleste gymnasieelever.

Modellen er tilpasset drivhuseffekten på Jorden, og vi vil i en opgave forsøge at generalisere til andre atmosfæretyper. Betragt figur 16. Til venstre på figuren kan man se, at 342 W/m^2 indstråles fra Solen. Dette kan man forstå ved, at udenfor Jordens atmosfære indstråler en flux fra Solen på $F_0 = \frac{L}{4 \cdot \pi \cdot d^2} = 1368 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$. Jorden dækker en skive med arealet $A_{\text{skive}} = \pi \cdot R^2$. Da Jorden har en atmosfære, fordeles varmen over hele planetens overflade, og dette areal er på $A_{\text{overflade}} = 4 \cdot \pi \cdot R^2$. Altså modtager hver kvadratmeter på Jorden

$$\frac{F_0 \cdot A_{\text{skive}}}{A_{\text{overflade}}} = \frac{F_0}{4} = 342 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

5.3.1 Opgave – Solens middelflux

Find Solens data samt afstand til Jorden i en tabel og kontroller resultatet ovenfor.



Figur 16: En atmosfæremodel, hvor der er taget højde for indflydelsen af Jordens atmosfære.[8]

Man ser til venstre i figuren, at noget stråling reflekteres af Jorden eller Jordens atmosfære. Den brøkdel, der reflekteres kaldes som tidligere nævnt for *albedo*en – eller mere præcist *Bond-*

albedo. Man ser at 107 W/m^2 reflekteres ud af 342 W/m^2 . Dermed må albedoen være $A = 107/342=0,313$.

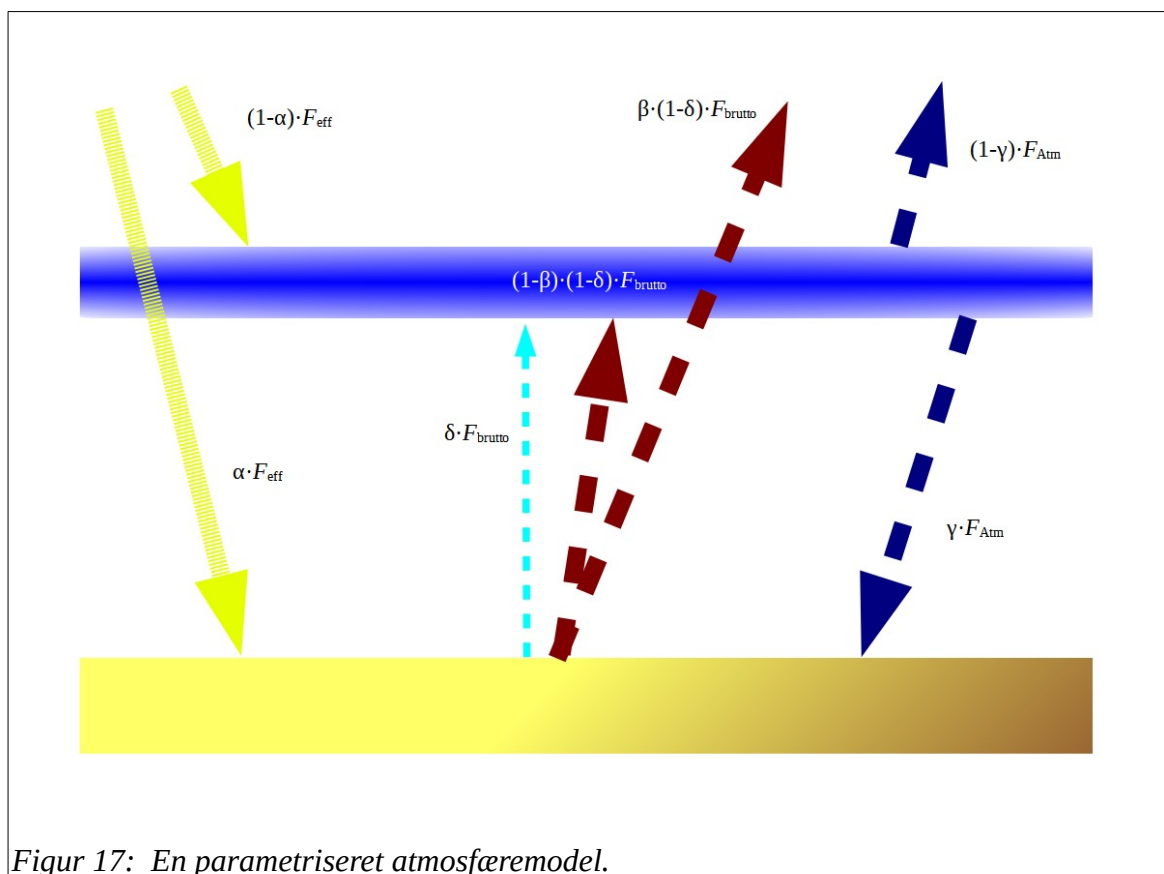
I midten af figuren kan man se, at 67 W/m^2 absorberes af atmosfæren, dvs. $(168 + 67) \text{ W/m}^2 = 235 \text{ W/m}^2$ ud af 342 W/m^2 absorberes af planeten/atmosfæren. I midten og til højre kan man se, at jordoverfladen udstråler energi i form af infrarød stråling, samt at overfladen også afleverer energi til atmosfæren i form af latent varme og via konvektion. Latent varme er når vanddamp fortætter til vand eller vand fortætter til is. Dvs. jordoverfladen *udstråler* 350 W/m^2 til atmosfæren og 40 W/m^2 direkte til verdensrummet. De resterende 102 W/m^2 afleveres altså ikke i form af stråling.

Til højre ser man, at Jorden modtager 324 W/m^2 i tilbagestråling fra atmosfæren, mens atmosfæren udstråler 165 W/m^2 til verdensrummet.

Alt i alt indstråles netto 235 W/m^2 , og der udstråles lige så meget. Atmosfæren sørger dog for, at Jordens strålingsligevægt findes ved en højere temperatur end uden atmosfæren.

Jordoverfladen udstråler i form af infrarød *stråling*, $F = 390 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \sigma \cdot T^4 \Leftrightarrow T = 288 \text{ K} = 15^\circ\text{C}$. Hvis vi ikke havde taget højde for atmosfærens betydning for drivhuseffekten, at varmen transporteres rundt på hele kloden, ville temperaturen have endt på -20°C , hvilket jo er ubehageligt lidt for et menneske.

På figur 16 er der brugt talværdier, der passer til Jorden – men de passer næppe til andre planeters atmosfærer. Derfor vil vi generalisere figuren, så tallene erstattes af nogle parametre, som vi selv kan justere. Betragt figur 17.



Fortolkning af parametrene

α : Brøkdelen af den indstrålede flux, som rammer Jordoverfladen.

β : Brøkdelen af overfladens *udstrålede* flux.

γ : Brøkdelen af atmosfærens udstrålede flux, der rammer jordoverfladen.

δ : Brøkdelen af den totale afleverede flux fra Jordoverfladen, som afleveres i form af konvektion og opvarmning af vand.

F_{eff} : Den del af Solens indstrålede flux, som absorberes af planeten/atmosfæren.

F_{brutto} : Al den flux, som jordoverfladen afleverer i form af *varmestråling*, konvektion og vandopvarmning.

F_{atm} : Al den flux, som atmosfæren afleverer. (Men det reflekterede sollys er ikke med.)

Vi kan nu opstille nogle formler for temperaturerne af atmosfærens øvre- og nedre del samt jordoverfladen. Beregningerne er ret trælse at udføre, men de er anført nedenfor, hvis nogen skulle være interesseret i at regne efter.

5.3.2 Atmosfæren

Atmosfæren modtager i alt fluxen $F_{\text{atm}} = (1 - \alpha) \cdot F_{\text{eff}} + \delta \cdot F_{\text{brutto}} + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot F_{\text{brutto}}$. Desuden kan vi for ligevægt indse, at $F_{\text{brutto}} = \alpha \cdot F_{\text{eff}} + \gamma \cdot F_{\text{atm}}$. Dermed kan vi bortsubstituere F_{brutto} . Vi får følgende

$$\begin{aligned}
 F_{\text{atm}} &= (1 - \alpha) \cdot F_{\text{eff}} + \delta \cdot (\alpha \cdot F_{\text{eff}} + \gamma \cdot F_{\text{atm}}) + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot (\alpha \cdot F_{\text{eff}} + \gamma \cdot F_{\text{atm}}) \Leftrightarrow \\
 F_{\text{atm}} &= (1 - \alpha) \cdot F_{\text{eff}} + \delta \cdot \alpha \cdot F_{\text{eff}} + \delta \cdot \gamma \cdot F_{\text{atm}} + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \alpha \cdot F_{\text{eff}} + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \gamma \cdot F_{\text{atm}} \Leftrightarrow \\
 F_{\text{atm}} - \delta \cdot \gamma \cdot F_{\text{atm}} - (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \gamma \cdot F_{\text{atm}} &= (1 - \alpha) \cdot F_{\text{eff}} + \delta \cdot \alpha \cdot F_{\text{eff}} + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \alpha \cdot F_{\text{eff}} \Leftrightarrow \\
 [1 - \delta \cdot \gamma - (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \gamma] \cdot F_{\text{atm}} &= [(1 - \alpha) + \delta \cdot \alpha + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \alpha] \cdot F_{\text{eff}} \Leftrightarrow \\
 F_{\text{atm}} &= \frac{(1 - \alpha) + \delta \cdot \alpha + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \alpha}{1 - \delta \cdot \gamma - (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \gamma} \cdot F_{\text{eff}} \Rightarrow \\
 \sigma \cdot T_{\text{atm, nedre}}^4 &= \gamma \cdot F_{\text{atm}} \Rightarrow T_{\text{atm, nedre}} = \sigma^{\frac{-1}{4}} \cdot \left(\frac{(1 - \alpha) + \delta \cdot \alpha + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \alpha}{1 - \delta \cdot \gamma - (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \gamma} \cdot F_{\text{eff}} \cdot \gamma \right)^{1/4} . \\
 \sigma \cdot T_{\text{atm, øvre}}^4 &= (1 - \gamma) \cdot F_{\text{atm}} \Rightarrow T_{\text{atm, øvre}} = \sigma^{\frac{-1}{4}} \cdot \left(\frac{(1 - \alpha) + \delta \cdot \alpha + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \alpha}{1 - \delta \cdot \gamma - (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \gamma} \cdot F_{\text{eff}} \cdot (1 - \gamma) \right)^{1/4} .
 \end{aligned}$$

5.3.3 Jordoverfladen

$$\begin{aligned}
 F_{\text{overflade}} &= F_{\text{brutto}} - \delta \cdot F_{\text{brutto}} = (1 - \delta) \cdot F_{\text{brutto}} \wedge F_{\text{brutto}} = \alpha \cdot F_{\text{eff}} + \gamma \cdot F_{\text{atm}} \Leftrightarrow \\
 F_{\text{overflade}} &= (1 - \delta) \cdot (\alpha \cdot F_{\text{eff}} + \gamma \cdot F_{\text{atm}}) = (1 - \delta) \cdot \alpha \cdot F_{\text{eff}} + (1 - \delta) \cdot \gamma \cdot F_{\text{atm}} \Leftrightarrow \\
 F_{\text{overflade}} &= (1 - \delta) \cdot \alpha \cdot F_{\text{eff}} + (1 - \delta) \cdot \gamma \cdot \left(\frac{(1 - \alpha) + \delta \cdot \alpha + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \alpha}{1 - \delta \cdot \gamma - (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \gamma} \cdot F_{\text{eff}} \right) \Leftrightarrow \\
 F_{\text{overflade}} &= \left[\alpha + \gamma \cdot \left(\frac{(1 - \alpha) + \delta \cdot \alpha + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \alpha}{1 - \delta \cdot \gamma - (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \gamma} \right) \right] \cdot (1 - \delta) \cdot F_{\text{eff}} = \sigma \cdot T_{\text{overflade}}^4 \Rightarrow \\
 T_{\text{overflade}} &= \sigma^{\frac{-1}{4}} \cdot \left[\alpha + \gamma \cdot \left(\frac{(1 - \alpha) + \delta \cdot \alpha + (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \alpha}{1 - \delta \cdot \gamma - (1 - \beta) \cdot (1 - \delta) \cdot \gamma} \right) \right]^{\frac{1}{4}} \cdot [(1 - \delta) \cdot F_{\text{eff}}]^{\frac{1}{4}} .
 \end{aligned}$$

Modellen ovenfor er ikke voldsomt indviklet, og det er da også muligt at opstille udtryk for de 3 temperaturer, men læseren vil nok medgive, at kompleksiteten i *beregningerne* er så stor, at det sandsynligvis bliver ret indviklet at lave en mere avanceret model. Derfor nøjes vi med denne model.

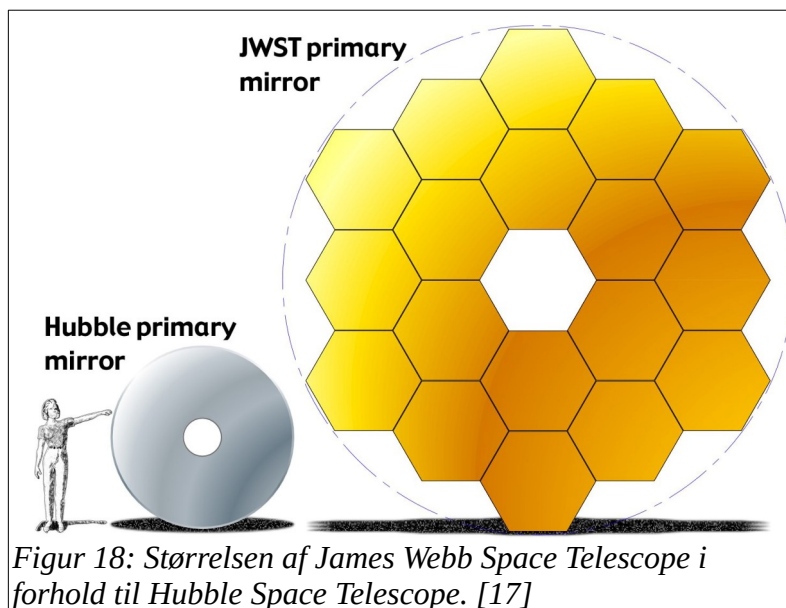
Modellen bruges i opgaven 7.6. *Jordens atmosfære og CO₂-indhold*, som er bagest i hæftet, og på astro-gym.dk findes et regneark, hvor formlerne er indtastet. Der findes også et Python-program på samme websted, som kan bruges til at prøve forskellige konfigurationer af.

6 Fremtidens missioner

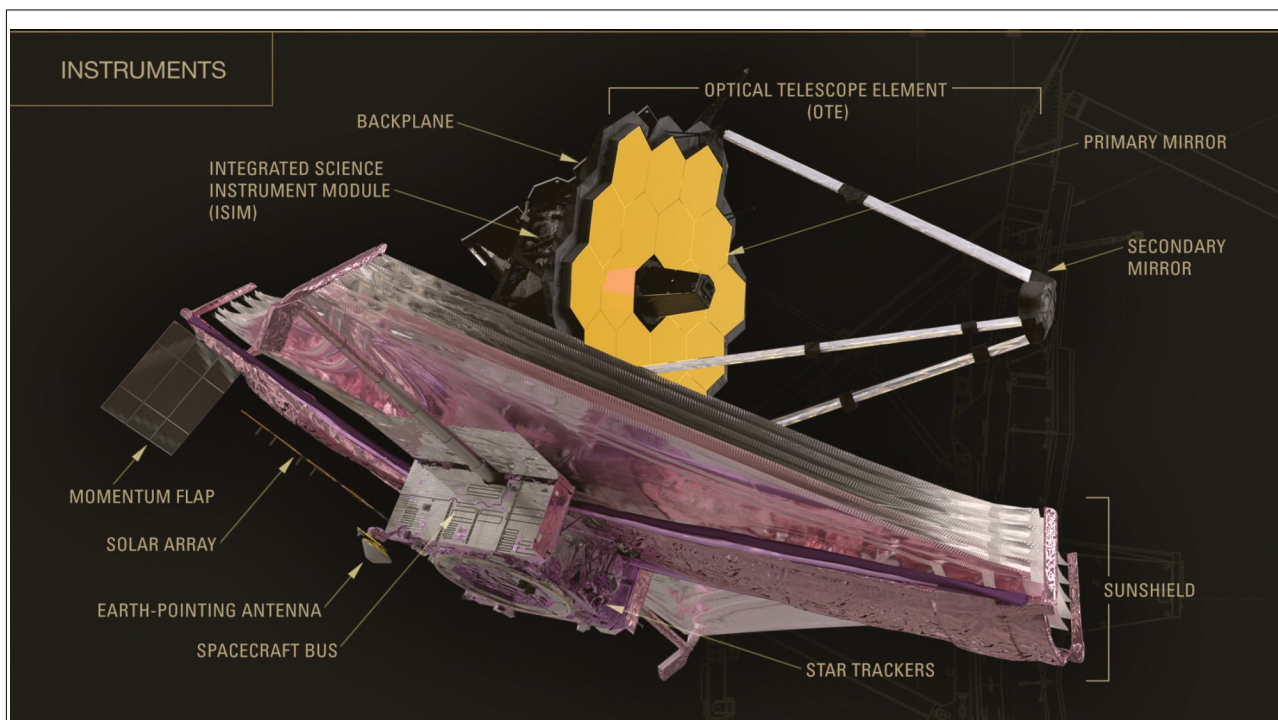
Når man søger efter exoplaneter har jordbaserede observationer vist sig at være udmærkede til at fremstille transitkurver. Dog kræver atmosfæredetektion adgang til rumteleskoper. Her har *Hubble Space Telescope* samt *Spitzer Space Telescope* været af uvurderlig hjælp.

Kepler Telescope har indsamlet data for over 170000 stjerner, og *TESS Telescope* har fortsat Kepler Teleskopes arbejde.

Jordbaserede teleskoper til radialhastighedsmålinger har hidtil givet os gode data, men Jordens atmosfære er en evig kilde til usikkerheder på målingerne – det er heller ikke muligt kontinuerligt at måle på stjernerne, da det jo er lyst i ca. halvdelen af tiden på Jorden. De bedste kikkerter er opstillet i Chile hos ESO.



Figur 18: Størrelsen af James Webb Space Telescope i forhold til Hubble Space Telescope. [17]



Figur 19: James Webb Space Telescope. (NASA.)

NASA/ESA har i 2022 sat James Webb Space Telescope (JWST) i drift, som er et teleskop med en spejldiameter på 6,5 m. Dermed er diameteren 3 gange så stor som det succesrige Hubbleteleskop. Teleskopet er mest følsomt i det infrarøde område, så det netop er i stand til se de kolde legemer i rummet – som f.eks. exoplaneter. Du kan læse mere om JWST her: <http://www.jwst.nasa.gov/>

JWST vil kunne detektere planeter ved direkte fotografi, og den vil kunne måle spektre for exoplaneter. Dermed vil man kunne sammenligne planeternes atmosfærer med Jordens atmosfære, som er unik i og med, at vi har meget O_2 og O_3 i atmosfæren. Disse molekyler er markører for den version af livet, som findes på Jorden – hvis vi finder disse molekyler i en fremmed klodes atmosfære, er det en indikation af liv, som på Jorden.

Indenfor de næste 10-20 år kan vi måske få besvaret det store spørgsmål: ”Er der nogen derude?”

7 Større opgaver

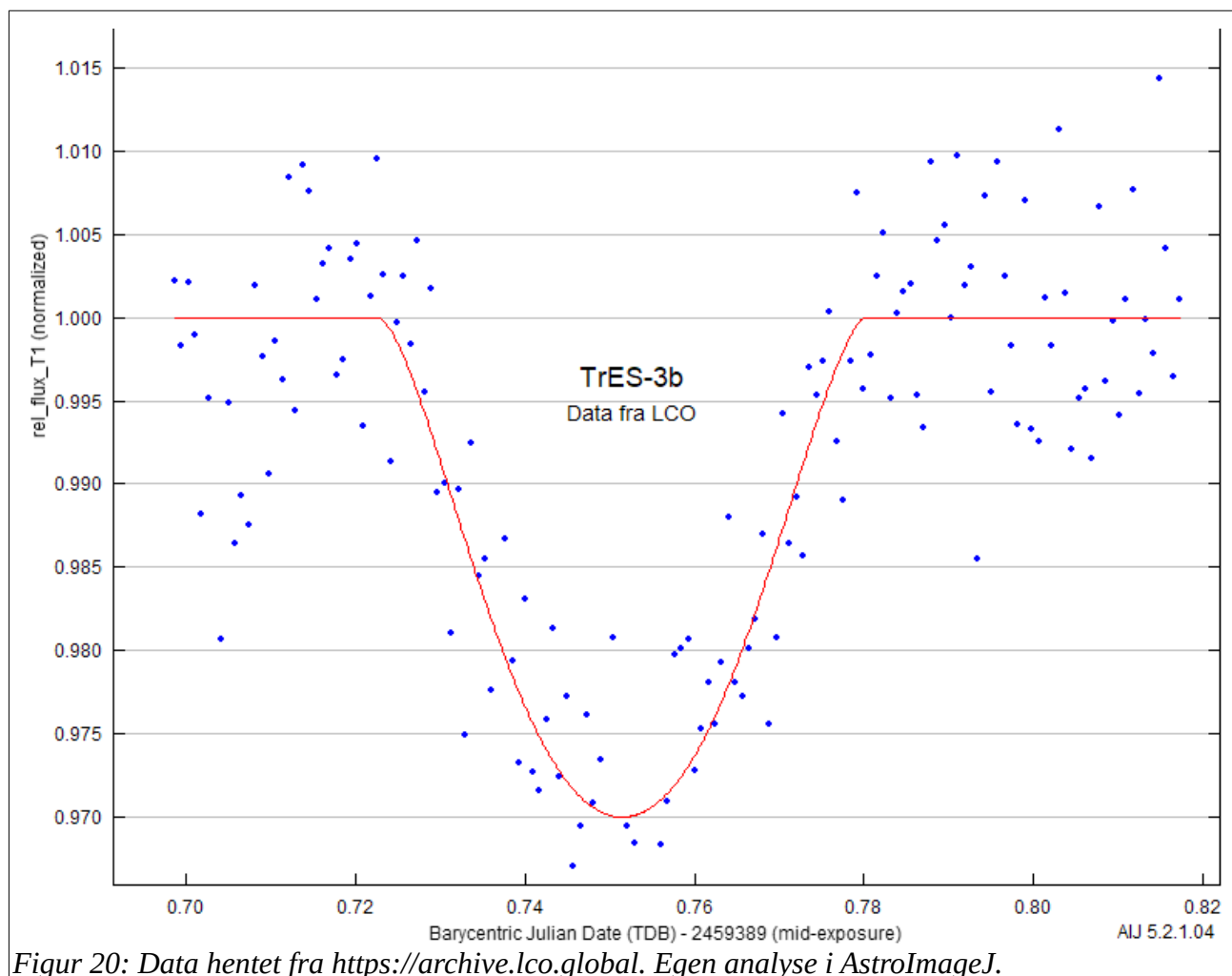
7.1 Lyskurve for TrES-3b

Nedenfor er vist en udmålt lyskurve for stjernen, som er angivet i overskriften.

- Benyt Adobe Readers virtuelle lineal til at bestemme transittiden, så præcist som muligt.
- Mål den relative dybde af truget og beregn R_{planet}/R_* .
- Stjernens radius er oplyst til at være $0,82018 R_{\text{sol}}$. Beregn exoplanetens radius.

Stjernens masse er oplyst til at være $0,962 M_{\text{sol}}$, og planetens omløbstid er af andre målt til at være $P = 1,30619^{\text{d}}$.

- Beregn planetens halve storakse.
- Beregn planetbanens inklinations.



7.2 Radialhastighedskurve for exoplaneten Qatar-1b

Din lærer giver dig et regneark med en serie $(t, v(t))$ -værdier. Stjernen om Qatar-1b har en masse på $0,85 M_{\text{sol}}$ og en radius på $0,823 R_{\text{sol}}$.

- Du skal lave en formel, der *folder*⁴ punkterne om en periode, du skal gætte. Dvs. det er fasen, der skal afbildes på 1. akse. Eccentriciteten sættes til $e = 0,03$.
- Når du er tilfreds med din tilpasning skal du aflæse amplituden af signalet.
- Beregn nu $m \cdot \sin(i)$ ved hjælp af formel (10).
- Sammenlign dine resultater med forskeres resultater. (Se talværdier i [6].)
- Er du glad for computere, kan du gentage analysen ved hjælp af programmet Exofit. (Se forklaring til programmet i afsnit 3.3.)

7.3 Transitkurve for exoplaneten Qatar-1b

Ved at anvende 33 billeder, som er optaget af stjernen Qatar-1, skal vi konstruere en lyskurve for stjernen, som ligger i stjernebilledet Dragen. (Draco.) Koordinaterne for stjernen er $(\alpha; \delta) = (20^{\text{h}} 13^{\text{m}} 32^{\text{s}}; +65^{\circ} 09' 43'')$. Billederne er optaget af André van der Hoeven⁵ fra Emmaus College i Holland. Den observerede exoplanet hedder Qatar-1b⁶. Ud fra lyskurven og kendskab til stjernens masse og radius skal exoplanetens radius og baneinklination bestemmes.

Billederne er optaget den 31/10-2011 kl. 21:43.01 UT og fremefter. For første billede er midtpunktet af de 5 eksponeringer 21:45:08. Koordinater for observationssted: $(l, b) = (4^{\circ} 38' 51,01'' \text{ E}; 51^{\circ} 50' 40,64'' \text{ N})$.

For at måle instrumentstørrelsesklasserne skal man gøre som følger:

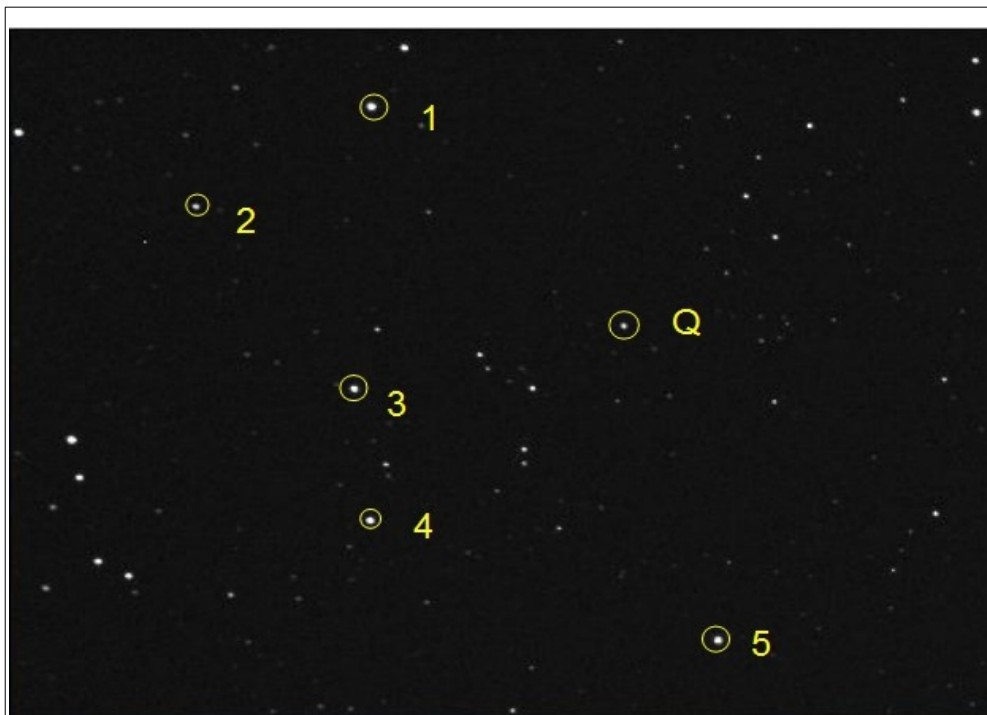
- Indlæs billederne i *Aladin* [1] eller *AstroimageJ* [2] (eller et tilsvarende program) og identificer mindst én men gerne nogle flere referencestjerner og mål deres flux, f , samt baggrund. (Se hjælp nedenfor.)
- Identificer stjernen Qatar-1 og mål dens flux, f , samt baggrund. Sørg for at du får *hele* fluxen med!
- Noter "Midpoint" i FITS-headeren, så observationstidspunktet kendes.
- Noter tallene i det udleverede regneark.
- Gentag for alle billederne. (I kan f. eks. udmåle 1 billede hver og derefter dele jeres resultater.)

7.3.1 Hjælp til identifikationen af stjernen

⁴ At *folde* et datasæt betyder, at flytte en lang tidsserie lægges ind på 1 bølge, hvor fasen, ϕ , af signalet lægges langs 1. akse. $\phi = (t - T_0)/P - N$. N er heltalsværdien af første led i formelen.

⁵ Oemstraat 5, 3341GH, HI-Ambacht, NL.

⁶ Her er Andrés datafremlæggelse: <http://var2.astro.cz/EN/tresca/transit-detail.php?id=1320186591>



Figur 21: Qatar 1b er markeret med bogstavet Q.

Sammenlign stjernerne på dit billede med figur 21 når du skal identificere Qatar-1 samt referencestjernerne.

7.3.2 Databehandling

- Beregn nu instrumentstørrelsesklasserne ved hjælp af formel (2). (I *AstroImageJ* er baggrunden automatisk fratrasket.)
- Tegn en $(t, \delta m)$ -kurve. Aflæs transittiden, T , så godt du kan. Bestem den totale ændring, Δm , i størrelsesklasse for stjernen.

Det er fra tidligere studier eller fra opgave 7.2 fundet, at planeten har en omløbstid, $P = 1,42$ dage, og stjernen har en masse på $M_{\text{Qatar-1}} = 0,85 M_{\text{sol}}$ samt en radius på $R_{\text{Qatar-1}} = 0,823 R_{\text{sol}}$.

- Beregn planetens halve storakse, a . Beregn planetens radius R_p og beregn endelig inklinationsvinklen, i .
- Hvis du har lavet opgave 7.2 med Qatar-1bs radialhastighedskurve kan du nu bestemme planetens masse.
- Beregn gennemsnitsmassefylden af Qatar-1b. Hvad slags planet er der tale om?

7.4 Opgave. Exoplanetdata

Denne opgave skal træne dig i at finde information om diverse exoplaneter.

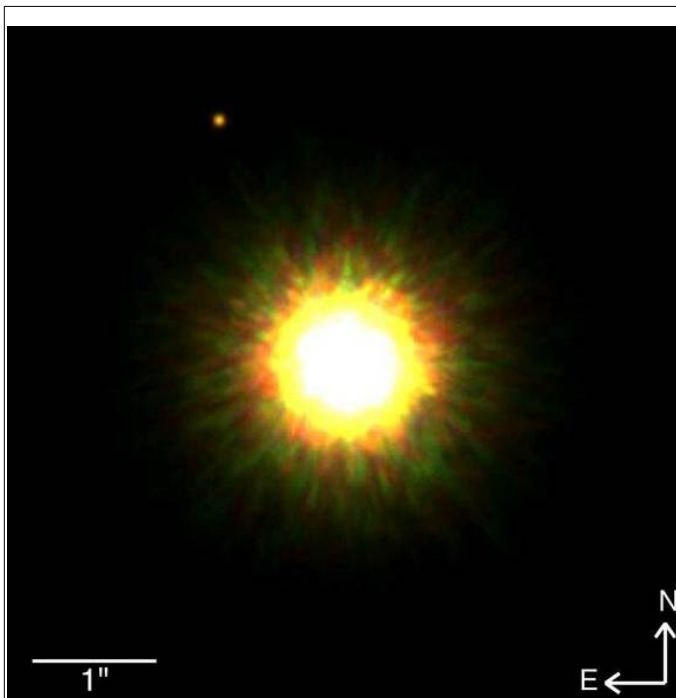
- Besøg NASA/Tess-missionen⁷ og find ud af, hvordan Tess-teleskopet samler information om exoplaneter. (Se videoen på forsiden af webstedet i fodnoten.)

⁷ <https://exoplanets.nasa.gov/tess/>

- b) Besøg NASA/Kepler-missionen⁸ og find ud af hvordan Keplermissionen samler information om exoplaneterne. (Tryk på *Spacecraft and Instrument* samt *Overview*.)

Besøg webstedet EXOPLANETS⁹. Her har du adgang til data for 3262 exoplaneter. Exoplaneterne er fundet kredsende omkring alle mulige stjerner med forskellige masser.

- c) Prøv at tegne et (P, a) -plot, hvor P er planetens omløbstid og a er dens halve storakse. Hvilken type graf får du? Var det forventet?
- d) Tegn et histogram over stjernemasserne. Hvordan er fordelingen af stjernernes masser? Er det konsistent med dit resultat fra spørgsmål c?
- e) Tegn et histogram over planetmasserne. Vælg f.eks. ca 70 inddelinger på 1. akse og lav et logaritmisk plot, så du nemmere kan skelne, hvad der foregår for små planetmasser. Hvilke typer planeter har vi fundet flest af?
- f) Lav endelig et (T_{stjerne}, a) -plot, hvor T_{stjerne} er stjernens overfladetemperatur og a er planetens halve storakse. Det kan være en fordel at vælge logaritmisk 2. akse. Prøv at klikke på et punkt, der passer til hvor Jorden/Solen ville have ligget i diagrammet. Undersøg planetens masse. Er der en planet, der minder om Jorden? (Husk at Jorden vejer ca 1/318 Jupitermasser.)
- g) Undersøg de andre parametre og lav selv et plot, som du finder interessant.



Figur 22: Første direkte billede af en exoplanet. (Det er den lille røde plet øverst i billedet.) Næsten alle andre exoplaneter er opdaget ved indirekte metoder. Kilde: <http://www.space.com/8680-direct-photo-alien-planet-finally-confirmed.html>

7.5 Opgave. Drivhuseffekten

Figur 16 viser, at Jorden reflekterer 107 W/m^2 . Figuren viser også, at drivhuseffekten bevirker, at jordoverfladens udstråling stiger fra 235 W/m^2 til 390 W/m^2 . (Det er markeret ved de røde pile på figuren.)

- a) Benyt Stefan-Boltzmanns lov til at beregne Jordens overfladetemperatur ved Jordens nuværende udstråling.
- b) Beregn hvor stor en fluxnedsættelse, der skal til, hvis temperaturen ønskes at sænkes med $2,0 \text{ K}$.
- c) Hvis fluxnedsættelsen sker ved nedsat drivhuseffekt, hvor mange procent skal tilbagekastningen (kaldet back radiation i figuren) fra atmosfæren til jordoverfladen så sænkes?

⁸ https://www.nasa.gov/mision_pages/kepler/main/index.html

⁹ <http://exoplanets.org/plots>

7.6 Jordens atmosfære og CO₂-indhold

Har du adgang til en Windows pc kan du bruge *Klima*-programmet, som kan downloades på samme sted som denne tekst. [18] Har du et andet styresystem, kan du installere Python og så køre python-versionen af programmet. Det kan hentes her. [19] (Python-programmet kræver også, at man installerer Tkinter, PIL og numpy.)

- Kør programmet med defaultværdierne og tryk på *Beregn*.
- Benyt outputvinduet tal til at måle hvor meget stråling jordoverfladen modtager og afleverer (inkl. bidrag fra termik/fordampningsvarme.) Er der ligevægt?
- Gentag for atmosfæren.
- Gentag for hele for hele Jorden, dvs. sammenlign hvad der absorberes af Jorden, og hvad der udstråles igen til verdensrummet.
- Noter Jordens overfladetemperatur ved forskellige selvvalgte CO₂-koncentrationer og tegn en graf over temperaturudviklingen som funktion af koncentrationen.

Emissiviteten af Jorden er defineret som $\varepsilon = \frac{F_{ud}}{F_{Jord}}$, hvor F_{Jord} er Jordoverfladens samlede *udstråling* og F_{ud} er planetens nettoudstråling til verdensrummet.

- Beregn emissiviteten ved standardbetingelserne.

8 Referencer

1. Aladin: <http://aladin.u-strasbg.fr/>
2. AstroImageJ: <https://astroimagej.com/>
3. Spitzerdata: <http://www.euhou.net>
4. Carole A. Haswell, "Transiting Exoplanets," Cambridge University Press, 2010.
5. Alsubai, K. A.; Parley, N. R.; Bramich, D. M.; West, R. G.; Sorensen, P. M.; Collier Cameron, A.; Latham, D. W.; Horne, K.; Anderson, D. R.; Bakos, G. Á.; Brown, D. J. A.; Buchhave, L. A.; Esquerdo, G. A.; Everett, M. E.; Fűrész, G.; Hartman, J. D.; Hellier, C.; Miller, G. M.; Pollacco, D.; Quinn, S. N.; Smith, J. C.; Stefanik, R. P.; Szentgyorgyi, A. (2011). "Qatar-1b: A hot Jupiter orbiting a metal-rich K dwarf star". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. **417** (1): 709–716. [arXiv:1012.3027](https://arxiv.org/abs/1012.3027). [Bibcode:2011MNRAS.417..709A](https://ui.adsabs.org/abs/2011MNRAS.417..709A). [doi:10.1111/j.1365-2966.2011.19316.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19316.x)
6. *Astronomy and Astrophysics*, v. **415**, p.391-402 (2004) . "The CORALIE survey for southern extra-solar planets. XII. Orbital solutions for 16 extra-solar planets discovered with CORALIE." Af M. Mayor et al.
7. <http://star-www.st-and.ac.uk/~kdh1/qatar1.html>
8. J.T. Kiehl & K. E. Trenberth, "Earth's Annual Mean Global Energy Budget", National Center of Atmospheric Research, Boulder, 1997.
<http://www.cgd.ucar.edu/cas/Trenberth/trenberth.papers/KiehlTrenbBAMS97.pdf>
9. Sreekumar Thaithara Balan & Ofer Lahav. <http://zuserver2.star.ucl.ac.uk/~lahav/exofit.html>
10. Cygwin-projektet: <http://www.cygwin.com/>
11. R-programmet: <http://www.r-project.org/>
12. <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/index.html>
13. www.southern-astro.com.au/
14. <http://www.ls.eso.org/lasilla/sciops/3p6/harps/science.html>
15. brucegary.net
16. paulanthonywilson.com
17. www.jwst.nasa.gov
18. <https://astro-gym.dk/Geovidenskab>
19. <https://www.python.org/downloads/>
20. <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/index.html>