Hammerseismik

Formål

I denne øvelse skal du bruge seismiske målinger til at undersøge undergrunden under Rosborg.

Teori

Vi har adgang til et sæt geofoner, som er en form for mikrofoner, der kan stikkes ned i jorden langs en linie. Geofonerne er anbragt med samme indbyrdes afstand.

Foran linien med geofoner lægger vi en metalplade, og så slås der hårdt på denne med en mukkert. Slaget danner en trykbølge (P-bølge), som bevæger sig ud i undergrunden som en ringbølge. Denne ringbølge reflekteres/brydes i grænselaget mellem de to jordlag, og vi kan måle på den reflekterede puls, som ryger op til jordoverfladen igen.

Vi antager en to-lagsmodel, dvs. vi har et overflademateriale af en vis tykkelse h, som er afgrænset af et vandret lag længere nede. Vi antager, at det nederste lag har en højere densitet end det øverste lag, og at lydhastigheden i det nederste lag dermed er højere end i det øverste lag.

Problemstillingen er illustreret på illustration 1 herunder.

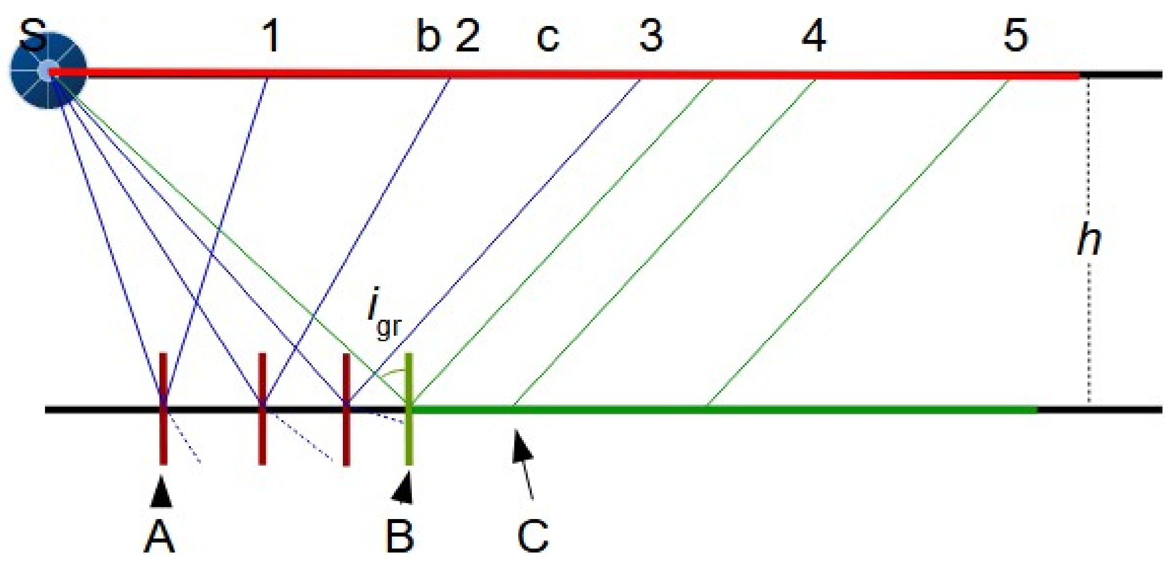

Illustration 1: Tallene 1-5 markerer placeringerne af geofonerne. S er stedet hvor pulsen dannes. Den røde linie markerer den del af pulsen, der bevæger sig langs jordoverfladen. De blå linier markerer punkter, hvor der sker refraktion og refleksion. Man kan indtegne flere blå linier, hvor der kun fremkommer refleksion, men det gør illustrationen mere uoverskuelig. De grønne linier markerer de refleksionsbølger, der fremkommer, når vinklen er større end den kritiske vinkel. Ved de grønne linier foregår noget af bølgebevægelsen nede i det nederste lag.

Geofonerne er forbundet til en computer, som registrerer tidspunkterne for de modtagne impulser, hvis udsving også måles og automatisk tegnes ind på en (x, t)-graf for hver geofon. Computeren lægger alle graferne ved siden af hinanden, så man får et sæt kurver, der ligner den, der er vist på illustration 2. Vores opgave er så at fortolke graferne, så vi kan regne dybden h ud.

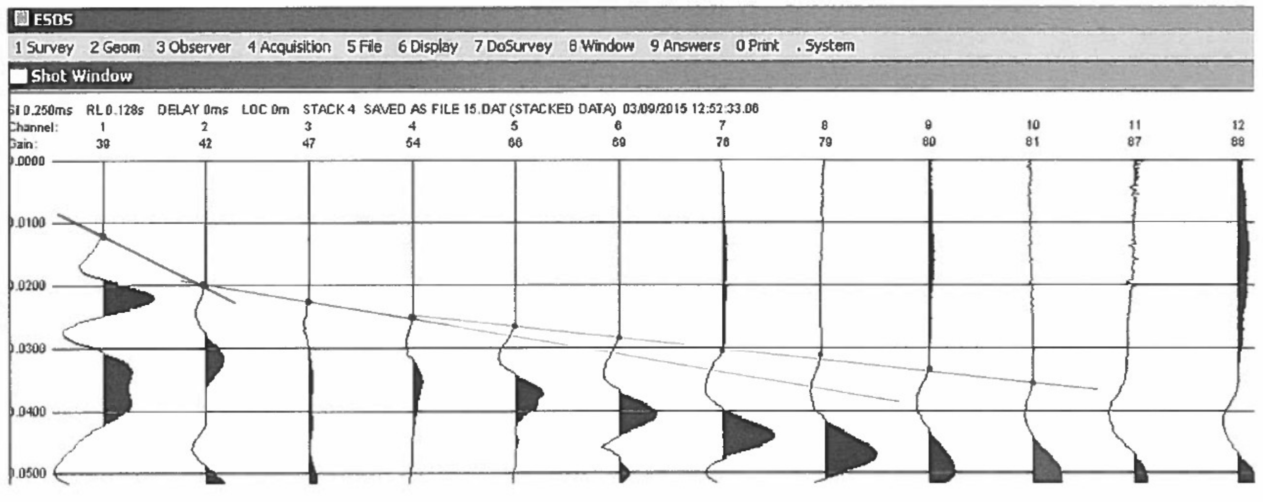

Illustration 2: En (x, t)-graf for hver geofon. Graferne er lagt ved siden af hinanden, dvs. hver geofon markerer en bestemt position, x, og så deles alle kurverne om t-aksen, der vender nedad.(Kilde: Peter P. Kjeldsen.)

Den røde linie

Betragt illustration 1. Den røde linie markerer den del af impulsen, som vandrer langs jordoverfladen. Bølgehastigheden i øverste jordlag kalder vi v_0. Eftersom fart er tilbagelagt afstand pr. tid kan vi skrive

$$x = v_0 \cdot t \Leftrightarrow \boldsymbol{t = \frac{x}{v_0}}. \qquad (1)$$

Dvs. den røde bølge afbildes som en ret linie i en $(x,\ t)$-graf. Hældningstallet $\alpha_0 = 1/v_0$.

De blå kurver

Betragt nu de blå kurver i illustration 1. Fra metalpladen, hvor impulsen skabes og hen til geofonen, bevæger impulsen sig ned til grænselaget og derefter videre til en geofon. Ifølge refleksionloven er ind- og udfaldsvinkel den samme.Vi kan bruge Pythagoras' sætning til at finde den tilbagelagte afstand ved f. eks. at betragte trekant *SA1*. Trekanten kan halveres i to retvinklede trekanter, hver med en katetelængde på ½·*S1* ≡ $x/2$, den anden katetelængde er h og hypotenuserne har hver især længden $v_0 \cdot t/2$. Ved brug af Pythagoras' sætning fås

$$\left(\frac{v_0 \cdot t}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{1}{v_0} \cdot \sqrt{x^2 + 4 \cdot h^2}. \qquad (2)$$

De grønne kurver

Betragt f.eks. trapezet *SBC4*. De to liniestykker *SB* og *C4* har af symmetrigrunde samme længde, og de kan hver især skrives som *SB* = *C4* = $t_1 \cdot v_0$, hvor t_1 er det tidsrum bølgen bruger på at tilbagelægge *SB* eller *C4*.

Betragt de to identiske trekanter *SBb* samt *Cc4*. Vi har ovenfor fundet et udtryk for hypotenusen, *SB*, og vi kender også grænsevinklen $i_{gr} = \sin^{-1}(v_0/v_1)$. (Den kommer fra brydningsloven.) Modstående katete *Sb* er givet ved $Sb = SB \cdot \sin(i_{gr}) = SB \cdot v_0/v_1$. Hosliggende katete er h. Dvs vi kan atter bruge Pythagoras' sætning og skrive

$$(v_0 \cdot t_1)^2 = h^2 + \left(\frac{SB \cdot v_0}{v_1}\right)^2 \wedge (v_0 \cdot t_3)^2 = h^2 + \left(\frac{C4 \cdot v_0}{v_1}\right)^2 \wedge t_1 = t_3 \Leftrightarrow$$

$$(v_0 \cdot t_1)^2 = h^2 + \left(\frac{v_0 \cdot t_1 \cdot v_0}{v_1}\right)^2 \Leftrightarrow \left(1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2\right) \cdot v_0^2 \cdot t_1^2 = h^2 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{t_1 = \frac{h}{v_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2}} = t_3}.$$

I det vandrette stykke i grænselaget *BC* bevæger bølgen sig med hastigheden v_1, og tiden bølgen bruger, kalder vi t_2. Dvs. at liniestykket $BC = v_1 \cdot t_2$. Vi målte fra geofon 4, og kalder vi dens position for x gælder det at $S4 = Sb + bc + c4 = x$. Dvs.

$$v_1\, t_2 = BC = x - 2\, Sb = x - \frac{2\, v_0\, t_1\, v_0}{v_1} \Leftrightarrow \boldsymbol{t_2 = \frac{x}{v_1} - 2\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2 t_1}.$$

Det samlede tidsrum er $t = t_1 + t_2 + t_3 = 2 \cdot t_1 + t_2$. Nu kan vi sætte udtrykkene for t_1, t_2 og t_3 ind og regne lidt. Resultatet bliver forskriften for en ret linie med hældningstal $\alpha_1 = 1/v_1$.

$$\boldsymbol{t = \frac{x}{v_1} + \frac{2\, h}{v_0} \sqrt{1 - \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2}}. \qquad (3)$$

Nu har vi fundet funktioner *t(x)* for de tre slags bølger, der kommer forbi detektoren. Hvis man tegner dem i samme koordinatsystem får vi

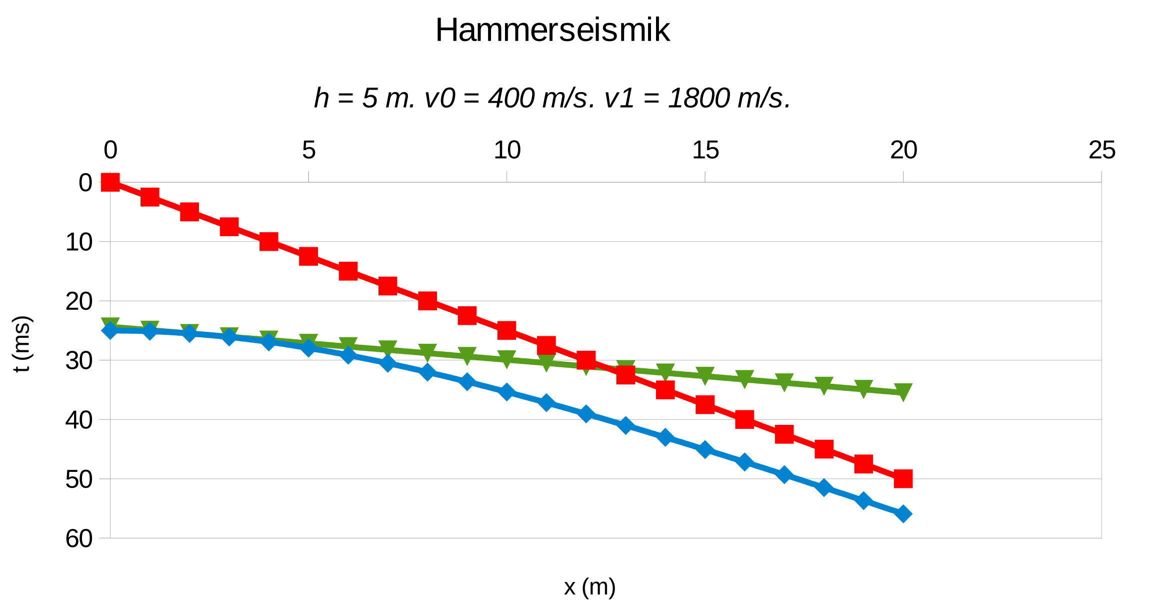

Illustration 3: Den direkte bølge er den røde bølge. Den grønne svarer til den kurve, der delvist vandrer i grænselaget, mens den blå kurve viser den bølge, der reflekteres. I virkelighedens seismodiagrammer er det nemmest at aflæse den røde- og den grønne kurve.

Det er jo dybden, *h*, vi er interesseret i, og den kan findes, hvis vi aflæser hældningstallene for den røde- samt den grønne linie. De reciprokke værdier giver v_0 og v_1. Ved skæringspunktet, x_{cross}, mellem de to linier kan vi sætte de to ligninger lig med hinanden for derefter at isolere h.

$$t=\frac{x_{cross}}{v_0}\wedge t=\frac{x_{cross}}{v_1}+\frac{2\cdot h}{v_0}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2}\Leftrightarrow\frac{x_{cross}}{v_0}=\frac{x_{cross}}{v_1}+\frac{2\cdot h}{v_0}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2}\Leftrightarrow$$

$$h=x_{cross}\cdot\left(\frac{1}{v_0}-\frac{1}{v_1}\right)\cdot\frac{v_0}{2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2}}\Leftrightarrow h=\frac{x_{cross}\cdot\left(1-\frac{v_0}{v_1}\right)}{2\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v_0}{v_1}\right)^2}}$$

$$\boldsymbol{h=\frac{x_{cross}}{2}\cdot\sqrt{\frac{v_1-v_0}{v_0+v_1}}}. \tag{4}$$

En alternativ måde at finde dybden h på, er ved at aflæse skæringspunktet mellem den blå kurve og $x = 0$. Vi kalder dette tidspunkt for t_0. Man ser af formlen på side 2 at følgende må gælde.

$$t(0)\equiv t_0=\frac{1}{v_0}\cdot\sqrt{0^2+4\cdot h^2}=\frac{2\cdot h}{v_0}\Leftrightarrow\boldsymbol{h=\frac{v_0\cdot t_0}{2}}.$$

Erfaringen viser dog, at det er svært at aflæse skæringspunktet, så formel 4 er den mest anvendelige formel.

Fremgangsmåde

Udrul kablet med geofonerne og stik dem ned i jorden. Sørg for at kablet er helt udspændt. Tilslut til seismografen og tænd for udstyret.

Sørg for at metalpladen sidder godt fast i jorden. Alle står stille nu, så der kun kommer en impuls fra hammeren. Den, som har hammeren, slår hårdt og skarpt ned i metalpladen. Der skal slås 3 gange. Et seismogram for alle tre slag fremkommer. Gem det. Kontroller at det er muligt at finde de to rette linier. (Dem som svarer til den røde- og grønne linie i teoriafsnittet.) Hvis det ikke er muligt at finde linierne, gentages forsøget.

Ændr. geofonafstanden til f. eks. 50 cm mellem hver geofon og gentag eksperimentet. Dette gøres så vi kan få en bedre opløsning for små dybder.

Databehandling

Aflæs x_{cross} samt α_0 og α_1. Beregn v_0 og v_1. Indsæt de fundne tal i formel 4 og bestem dybden. Gentag for det andet seismogram med den anden geofonafstand.

Benyt en tabel over hastigheder til at vurdere, hvad de to lag består af.

Diskussion/Konklusion

Diskuter dine resultater og skriv en passende konklusion.

Materiale (bjergart)	P-bølge hastighed (m/s)
Sand/grus (tørt)	200 - 1000
Sand/grus (vandmættet)	1500 - 2000
Sandsten	2000 - 6000
Ler	1000 - 2500
Kalk	2000 - 4500
Granit	5800 - 6500